Entropía de Shannon y equidad

Alberto L. Maltz

Introducción

En este artículo nos ocupamos de mostrar que puede vincularse el clásico concepto de entropía de Shannon con un criterio para comparar equidad de distribuciones. La primera sección trata el reparto de m objetos entre n personas y la segunda el de una masa unitaria en n partes.

Nuestro propósito es presentar la idea en los casos básicos, pero no hay ningún inconveniente en extender esta vinculación a espacios de probabilidad mucho más generales.

1. Repartiendo monedas

Tengo 16 monedas de igual valor para repartir entre 4 amigos. Qué reparto es más equitativo: $(1,5,5,5)$ o $(2,3,4,7)$?

El problema no pertenece por el momento a la matemática debido a que no tenemos un criterio objetivo de equidad.

En el caso general (m monedas entre n personas) tenemos dos números enteros $1 < n \leq m$ y cada reparto es un arreglo de n números enteros no negativos $(k_1, ..., k_n)$ tales que $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Sería bueno tener una función $E(k_1, ..., k_n)$ que tome valores más grandes cuanto más "justo" sea el reparto $(k_1, ..., k_n)$. En ese sentido van las propuestas

$$\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} |k_i - m/n|} \quad , \quad \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} (k_i - m/n)^2}$$

y otras similares. Veamos otra idea (no exenta, como todas, de subjetividad):

Tomemos dos repartos posibles $(k_1, ..., k_n)$ y $(j_1, ..., j_n)$. Si el primero es más equitativo tengo la percepción de que si hago un reparto al azar, el resultado $(k_1, ..., k_n)$ tendría que ser más probable que $(j_1, ..., j_n)$. O para quienes prefieren la interpretación frecuencial: si hago muchos repartos al azar, $(k_1, ...k_n)$ tendría que presentarse mayor cantidad de veces que $(j_1, ..., j_n)$.

La distribución al azar puede hacerse numerando las monedas de 1 a m, las personas de 1 a n y efectuando m sorteos ordenadamente. Aplicando combinatoria obtengo para cada reparto $(k_1, ..., k_n)$ la probabilidad

$$\frac{m!}{k_1!...k_n!.n^m} \quad .$$

y esto me sugiere proponer

$$E(k_1,...,k_n) = \frac{1}{k_1!...k_n!} \quad .$$

2. Equidad de espacios de probabilidad finitos

Consideremos un conjunto de resultados $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ $(n > 1)$ y dos posibles asignaciones de probabilidades $(p_1,...,p_n)$, $(q_1,...,q_n)$; es decir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1 \quad .$$

Cuál es más equitativa?. Vamos a basarnos en la propuesta de la sección anterior. Supondremos en primera instancia que todos los p_i y q_i son positivos y los aproximaremos con números racionales. Siempre se pueden construir $2n+1$ sucesiones de números enteros positivos

$$m^{(r)}, k_1^{(r)}, ..., k_n^{(r)}, j_1^{(r)}, ..., j_n^{(r)}$$

todas ellas tendiendo a $+\infty$ cuando $r \to \infty$ y cumpliendo para todo r:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} j_i^{(r)} = m^{(r)} \tag{1}$$

y para todo i:

$$\lim_{r\to\infty} k_i^{(r)}/m^{(r)} = p_i \quad , \quad \lim_{r\to\infty} j_i^{(r)}/m^{(r)} = q_i \quad . \tag{2}$$

Para decidir por ejemplo que $(p_1,...,p_n)$ es más equitativa que $(q_1,...,q_n)$ con las ideas de la sección anterior parece natural pedir

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{E(k_1^{(r)},...,k_n^{(r)})}{E(j_1^{(r)},...,j_n^{(r)})} = \liminf_{r\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} j_i^{(r)}!}{\prod_{i=1}^{n} k_i^{(r)}!} \geq 1 \quad .$$

Sería suficiente que pudiera probarse

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{\prod_{i=1}^{n} j_i^{(r)}!}{\prod_{i=1}^{n} k_i^{(r)}!} \right)^{1/m^{(r)}} \geq 1 \quad . \tag{3}$$

El agregado del exponente $1/m^{(r)}$ permitirá resolver el límite usando la fórmula de Stirling:

$$\lim_{L\to\infty} \frac{L!}{(L/e)^L\sqrt{2\pi L}} = 1 \quad . \tag{4}$$

A partir de (1),(2),(4) y un poco de álgebra obtenemos

$$\lim_{r\to\infty} \left(\frac{\prod_{i=1}^n j_i^{(r)}!}{\prod_{i=1}^n k_i^{(r)}!} \right)^{1/m^{(r)}} =$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\prod_{i=1}^n (\frac{j_i^{(r)}}{m^{(r)}})^{\frac{j_i^{(r)}}{m^{(r)}}}}{\prod_{i=1}^n (\frac{k_i^{(r)}}{m^{(r)}})^{\frac{k_i^{(r)}}{m^{(r)}}}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (\frac{j_i^{(r)}}{m^{(r)}})^{1/2m^{(r)}}}{\prod_{i=1}^n (\frac{k_i^{(r)}}{m^{(r)}})^{1/2m^{(r)}}}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n q_i^{q_i}}{\prod_{i=1}^n p_i^{p_i}} \quad .$$

De modo que la condición (3) es equivalente a

$$\prod_{i=1}^n p_i^{-p_i} \geq \prod_{i=1}^n q_i^{-q_i} \quad .$$

Observamos que la equidad de $(p_1, ..., p_n)$ crece junto con $\prod_{i=1}^n p_i^{-p_i}$ o también con el logaritmo de esta cantidad (en cualquier base mayor que 1) ya que "log" es una función creciente y conserva por lo tanto las desigualdades. Si elegimos esta última opción llegamos entonces a la fórmula de Entropía de Shannon:

$$H(p_1, ..., p_n) = -\sum p_i \log p_i \quad .$$

La inclusión de casos con probabilidades nulas dá lugar a un tratamiento similar (con algunas precauciones) arribándose a la misma expresión con la convención "$0. \ln(0) = 0$".

La idea original de C. Shannon en 1948 estaba orientada a necesidades prácticas de la Teoría de la Información, marco en el que aparece como natural la base 2 para el logaritmo. Sin embargo, el campo de aplicación por excelencia de este concepto es la Físico-matemática, donde la entropía es una medida del "grado de desorden" de un sistema.

Recomendamos [1] para la lectura de los conceptos básicos del tema y [2] para generalizaciones y aplicaciones.

Referencias

1. S.Ross. A first course in Probability, Macmillan College Publishing Company, New York.
2. A. Rényi. Cálculo de Probabilidades, Editorial Reverté.

Universidad Nacional de La Plata.
E-mail: alberto@mate.unlp.edu.ar