ESTUDIO DE LAS CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO SOBRE LA DEMOSTRACIÓN

Virginia Montoro

Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue

vmontoro@crub.uncoma.edu.ar / vmontoro@gmail.com.ar

Nivel educativo: Universitario

Reporte de Investigación. Comunicación oral.

INTRODUCCION

La noción filosófica de *demostración*, desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad; sin embargo al término *demostración* se lo utiliza en los ámbitos sociales y profesionales más diversos y posee distintos significados. Uno de estos significados puede ser "realizar la acción efectiva que evidencia aquello que se pretende ver"; por ejemplo: *el movimiento se demuestra andando.* También se asimila la demostración al hecho de que se "enseñe cómo hacer algo"; ej: *demostrar como funciona determinado programa de computadora*; también, aplicando una falsa inducción completa se dice "esto demuestra que..." y de un sólo ejemplo se saca una conclusión universal, ej: *en una publicidad, un par de medias blancas demuestra la superioridad de un jabón en polvo*. En el mundo castrense son frecuentes las *demostraciones de fuerza* y en el ámbito jurídico, es común apelar a la necesidad de *demostrar la veracidad del modelo propuesto para explicar la sucesión de los hechos.* (Alsina, 2003).

En matemática la idea de demostración y el verbo demostrar tienen una dimensión precisa y notable. Se diferencia claramente de procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber como las ciencias experimentales, en donde las demostraciones se basan en la evidencia empírica de los hechos; o la economía, que se sustenta en la evidencia estadística de los resultados, o la historia, "demostrada" a través de evidencia de los datos y de los documentos. Al decir de Arsac (1987) *la demostración es el procedimiento de validación que caracteriza la matemática respecto de las ciencias experimentales y así ocupa un lugar central desde el punto de vista epistemológico en esta disciplina.* En la literatura especializada aparecen definiciones *esenciales* de lo que se entiende por demostración de un teorema matemático: una sucesión de deducciones lógicas rigurosas desde alguna proposición ya aceptada hasta la que se pretende probar.

Sin embargo no podemos soslayar que demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como su redacción final parece indicar; la denominada *demostración final* de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya.1954, Lakatos.1976, Schoendfeld.1992).

Consideramos a la demostración como esencial en el método Matemático, y por lo tanto, un componente ineludible en la Educación Matemática y fundamentalmente en la Formación de Profesores; las pruebas están íntimamente conectadas con la construcción de las ideas matemáticas, demostrar debería ser una actividad tan natural como definir, representar o resolver problemas. Ahora bien, en el proceso de aprendizaje de la matemática la argumentación utilizada para *demostrar* una proposición, puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los/as alumnos/as, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez Recio (1997–2001), Martínez Recio (2002), Ibáñez Jalón, (2002) Sáenz Castro(2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los/as estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

Consideramos de interés el estudio de las concepciones de los/as estudiantes en los dominios específicos de conocimiento (Pozo y Carretero. 1987- 1992, Carretero. 1997) ya que acordamos con que el estudio de las concepciones de los/as estudiantes debe ser punto de partida de la enseñanza, debido a que para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel y col 1978/83) es necesario partir de las ideas que los aprendices ya poseen, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas.

En el presente trabajo reseñaremos los resultados de la exploración de las concepciones de los/as estudiantes de profesorado de Matemática sobre la *demostración* obtenidos en dos proyectos: *La demostración en geometría en la formación de profesores*[1] y *El aprendizaje de la Demostración en Geometría*[2]. En estos proyectos nos propusimos como objetivo general el estudio del proceso de

[1] Proyecto de Investigación 04B105, avalado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por C. Ferraris y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo fueron R. Santinelli, L. Siñeriz , M. Ferrero y M. Juan. Con informe final favorable

[2] Proyecto de Investigación 04B134, avalado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por L. Siñeriz y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo fueron C. Ferraris, M. Ferrero; M. T. Juan; Cifuentes M. y Santamaría. Flavia. Con informe final favorable.

aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría y como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos/as estudiantes sobre la demostración matemática. Este trabajo tratará particularmente este último objetivo específico.

Como base para esta investigación, se les propuso a estudiantes del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue; al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano, tareas relacionadas con *demostrar* y se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones sobre la demostración matemática.

En primera instancia se realizó una caracterización de los/as participantes según las palabras que asocian a los términos *demostración* y *justificación,* este estudio se puede ver en detalle en Montoro, V. y Juan, M. T. (2005). Luego se realizó una categorización de las producciones de los estudiante frente a tareas de demostrar propuestas y se obtuvo información sobre *qué tipo de pruebas*[3] realizaban cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría, para detalles puede verse Montoro; V. (2005). Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los/as estudiantes sobre *cómo se aprende a demostrar*, se analizaron las respuestas de estos/as estudiantes a algunas preguntas abiertas de la entrevista y mediante la interpretación del léxico utilizado se puso de manifiesto concepciones sobre el aprendizaje de la demostración matemática presentes en distintos grupos de estudiantes, ver detalles en Montoro, V. (2007). También en esta línea, se analizaron otras preguntas de la entrevista y se delinearon aspectos de las ideas de los/as estudiantes sobre *qué significa demostrar* en matemática, y si significa lo mismo en todas las ramas de la misma y si esto es así en otras ciencias, este análisis puede verse en Montoro, V. (2008). Por último se estudiaron las prácticas argumentativas que producen estos/as estudiantes frente a la consigna *demostrar* y frente a la consigna j*ustificar*; y su relación con sus concepciones sobre la demostración; para detalles puede verse: Montoro, V. (2009).

Es objetivo de este trabajo, además del ya propuesto de reseñar estos resultados, encontrar relaciones entre ellos y dar conclusiones generales de este estudio sobre las concepciones de los/as estudiantes de Profesorado sobre la Demostración Matemática.

[3] Si bien en el lenguaje matemático las palabras prueba y demostración se toman como sinónimos, en este trabajo; a fin de atender a toda la gama de argumentaciones que producen los/as estudiantes para justificar una aserción, optaremos por usar la palabra "prueba" en un sentido amplio, dado que el término "demostración" tiene una connotación muy particular en Matemática que hace referencia a lo estrictamente formal. De este modo intentamos cubrir los distintos tipos de argumentaciones, desde los estadios más intuitivos a los estrictamente formales utilizando la palabra "prueba" para designa las distintas formas de realizar una argumentación que puede llevar a una justificación de lo que se está afirmando.

METODOLOGÍA

Participantes

Participaron 13 estudiantes que cursaban la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche, de la Universidad Nacional del Comahue. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios.

Las edades de estos/as estudiantes oscilaban entre 19 y 33 años, y en su totalidad habían cursado previamente las asignaturas Álgebra I y II; Calculo I y II y Geometría Analítica; en estas asignaturas trabajaron numerosas demostraciones y en la primera estudian elementos de lógica proposicional y métodos de demostración.

Instrumentos de indagación

Se les propuso a los/as estudiantes; al comienzo de la asignatura Geometría Euclidea del Plano tres tareas para ser resueltas en forma individual por escrito y que se transcriben a continuación:

Tarea 1: Escribe las tres primeras palabras que te vengan a la mente cuando leas cada una de las siguientes: GEOMETRÍA - DEMOSTRACIÓN - JUSTIFICACIÓN:

Tarea 2: A continuación se presentan tres enunciados referidos a cuadriláteros.

E1: Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes.

E2: Si las diagonales de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un rectángulo.

E3: Si las diagonales de un cuadrilátero no son congruentes, entonces el cuadrilátero no es un rectángulo.

Decir si E1, E2 y E3 son verdaderos o falsos, justificando cada respuesta.

Tarea 3:

Definición: Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular al mismo por el punto medio.

A continuación se enuncian tres propiedades relacionadas con la mediatriz de un segmento:

P1: Los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

P2: Las mediatrices de los lados de un triángulo tienen un punto en común.

P3: Todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia.

3.a) Demostrar P1.

3.b) Justifica la siguiente afirmación: "P2 es verdadera".

3.c) A partir de P1 y P2 demostrar P3.

Se realizó, días mas tarde una entrevista individual a cada uno/a de los/as participantes, con la presencia de una investigadora a cargo de la entrevista y otra observadora. En la que se lo/a consultó sobre el sentido de cada producción y además se le realizó las siguientes preguntas abiertas:

1. *¿Cómo piensas que se aprende a demostrar?*
2. *¿Qué consideras que te sirvió para aprender a demostrar?*
3. *¿Cómo hacías tus primeras demostraciones?*
4. *¿Y las actuales?*
5. *¿Cómo imaginas tus demostraciones después de recibido/a?*
6. *¿Cómo sabes cuando una demostración es correcta?*
7. *¿Consideras que demostrar es lo mismo en cualquier rama de la matemática?*
8. *¿Consideras que es lo mismo demostrar en matemática que en otras disciplinas?*

Las respuestas fueron orales y en forma de dialogo con la entrevistadora, que solo intervenía si era necesario aclarar algún aspecto; las respuestas fueron grabadas y luego trascriptas en su totalidad

Metodología de análisis

Análisis de la tarea de asociación libre de palabras (Tarea 1)

Para el análisis de las producciones de los/as participantes respecto de la Tarea 1, se realizó en una primera etapa una categorización de las palabras escritas por los/as estudiantes como respuesta a la consigna. Luego con el propósito de evidenciar asociaciones entre las palabras asignadas por los/as estudiantes a los distintos términos (Geometría – demostración – justificación), como así también, cuan similares o diferentes pueden ser las producciones de los/as distintos/as estudiantes, aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[4] (Benzécri, 1973), método de análisis multivariado de datos especialmente diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los/las participantes y agrupar a éstos según sus modos de respuesta .

Análisis del tipo de pruebas en tareas de demostrar (Tareas 2 y 3)

Para el análisis de las Tareas 2 y 3 se realizó, en una primera etapa, una categorización de las producciones de los/as alumnos/as en cada uno de los items de las tareas, buscando en cada una de ellas

[4] El Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) es un método de análisis multivariado de datos diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los individuos y agrupar a éstos según sus modos de respuesta. Si bien el AFCM es un método especialmente útil para grandes matrices de datos; nada hay en su fundamentación que impida aplicarlo para pocos individuos; es utilizado aquí para evidenciar relaciones entre los modos de respuestas de los/as estudiantes, que de otra manera hubiesen sido muy difíciles de sacar a la luz y que pueden ser constatadas fácilmente en los datos. El detalle de la aplicación de este método, o una mayor profundización de la técnica del mismo se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon, (1979) o en Crivisqui, (1993).

indicadores que dieran cuenta del papel que se le asigna al ejemplo, la utilización de procedimientos propios de la matemática, el aporte de argumentos deductivos y de lenguaje simbólico.

Luego a cada producción se le asignó una categoría de *"tipo de prueba"* siguiendo la caracterización de Siñeriz y Ferraris (2005) [5]. Con el propósito de evidenciar asociaciones entre las categorías asignadas a las pruebas ofrecidas por los/as estudiantes, como así también, agrupar a estos/as según sean similares los tipos de pruebas ofrecidos, aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) método de análisis multivariado de datos especialmente diseñado para identificar asociaciones entre modos de respuestas de los/as participantes y agrupar a éstos según estos modos. EL AFCM fue aplicado a la tabla que cruza a los/as estudiantes y la categorización según el tipo de prueba para cada ítems de cada una de las tareas 2 y 3.

Análisis de las concepciones de los/as estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración* (las 6 primeras preguntas abiertas de la entrevista).

Con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los/as estudiantes sobre el *aprendizaje* de la demostración matemática, se analizaron las 6 primeras preguntas abiertas enunciadas mas arriba. Se confeccionó una base de datos donde se asoció a cada estudiante sus respuestas literales; como así también su edad, el avance en la carrera; el grupo en que quedó clasificado según la Tarea 1 y finalmente el tipo de pruebas producidas en las tareas 2 y 3.

Se utilizó una metodología de análisis que permite evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de los distintos grupos de estudiantes y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos grupos de estudiantes. Se utilizó para ello el análisis lexicográfico[6] del corpus de respuestas.

---

[5] Se denomina como *pruebas empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en: *prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción; *prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente *prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo. Las *pruebas intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está caracterizada por el lenguaje matemático. Distinguiremos la experiencia mental y la deducción formal. En la *experiencia mental* se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la *deducción formal* la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación. (Siñeriz y Ferraris. 2005).

[6] En este caso contábamos con respuestas a preguntas abiertas y se buscó una metodología que nos permitiera evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de los distintos grupos de estudiantes, y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos gruposs. Se utilizó para ello el análisis lexicográfico del corpus de respuestas; respecto de las formas léxicas utilizadas por los/as estudiantes; de los segmentos repetidos y luego una análisis factorial de la tabla léxica agregada, que es aquella que cruza los grupos de individuos (según sea el tipo de pruebas que producen) con las formas léxicas utilizadas. En cada análisis se realizó, además, una clasificación de las palabras (o segmentos) utilizadas en las respuestas según estuviesen presentes en las mismas repuestas y su correspondiente asociación con alguno de los grupos de Tipos de Pruebas. Se realizó una clasificación *jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias. Para mayor detalle en la aplicación del análisis léxicográfico puede consultarse a Béncue Bertaut; 1991; Lebart y col. 1995; Lebart y col.2000.

Con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes en el corpus como así también tipos de respuestas y su relación con los tipos de pruebas que producen los/as estudiantes; se realizaron 3 análisis lexicográficos. El primero de estos análisis corresponde a las respuestas a las preguntas: 1 y 2 que entendemos indagan sobre *cómo se aprende a demostrar*; el segundo análisis corresponde a las preguntas 3 y 4 que lo hacen sobre *qué cambia al aprender a demostrar* y por último el de las respuestas a las preguntas 5 y 6 que indagan sobre: *cómo es una demostración correcta*. A modo ilustrativo se las relacionó también con la edad; avance en la carrera de los/as estudiantes y sus respuestas a la Tarea 1.

En cada análisis se realizó, además, una clasificación de las palabras (o segmentos) utilizadas en las respuestas según estuviesen presentes en las mismas repuestas y su correspondiente asociación con alguno de los grupos de *Tipos de Pruebas*. Se realizó una clasificación *jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias.

Análisis de las preguntas abiertas 7 y 8 en cuanto a las concepciones de los/as estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias.

Con el propósito de delinear aspectos de las concepciones de los/as estudiantes sobre *qué significa demostrar* en matemática, como así también sobre posibles relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen los/as estudiantes al comienzo del estudio de la Geometría, se realizó el análisis de las producciones de los/as participantes para las preguntas 7 y 8 según la siguiente secuencia; en una primera etapa y con el fin de sistematizar los datos primarios, se categorizaron las respuestas según los argumentos esgrimidos por los/as estudiantes para justificar su respuesta afirmativa o negativa a las preguntas. Luego con el propósito de evidenciar cuan similares o diferentes pueden ser las respuestas de los distintos estudiantes, como así también asociaciones entre las respuestas dadas a estas preguntas y posibles relaciones de estas con las pruebas que estos/as estudiantes producen aplicamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM).

Análisis de las prácticas argumentativas en la Tareas 3

Analizando desde otro punto de vista la tarea 3, se estudiaron las *prácticas argumentativas* que producen los/as estudiantes frente a la consigna demostrar y frente a la consigna justificar; a fin de aportar nuevos indicios de las concepciones de estos/as estudiantes sobre la demostración matemática en cuanto a su diferenciación de otros tipos de argumentación. Así mismo relacionar estas prácticas, con el tipo de pruebas que producían estos/as estudiantes al comienzo del estudio de la geometría.

La categorización de las prácticas argumentativas de los/as estudiantes fue realizada por la autora procediéndose después a realizar controles cruzados con otras integrantes del proyecto de modo de cuidar la aplicación de criterios uniformes y apropiados. En algunos casos que se presentaban dudas sobre las producciones - por ejemplo: si sólo aparecía un dibujo podía ser porque el estudiante consideraba que éste era suficiente para justificar la afirmación correspondiente o porque simplemente estuvo probando y decidió no seguir con la tarea- se recurrió a las entrevistas para dilucidar sobre estas cuestiones.

Los indicadores que se tuvieron en cuenta fueron en primera instancia si la argumentación utilizada para validar la afirmación era una *argumentación deductiva* es decir que el estudiante desprende consecuencias de las hipótesis o realiza inferencias basadas en propiedades y definiciones, o simplemente una manifestación de hechos a las que denominamos *explicación*. Consideramos que el estudiante brinda una explicación cuando se limitan a dar razones convincentes no deductivas; declara o expone razones o causas de algún hecho con palabras, dibujos o ejemplos, para que se haga evidente.

RESULTADOS Y DISCUSION

De la tarea de asociación libre de palabras (Tarea 1)

La mayoría de las palabras asociadas a GEOMETRÍA representan *conceptos geométricos* (figuras; plano, triángulo, etc.) o i*nstrumentos de Geometría* (compás, regla, etc.), lo que puede deberse al hecho de ser GEOMETRÍA un concepto con el que los/as estudiantes están familiarizados desde los comienzos de la escolaridad; es notable que no aparecen aspectos del método matemático como podría ser: propiedades, teoremas, justificaciones, problemas, etc.

Vemos como un punto destacable, para el tema que nos convoca, que en éstas, no aparece la palabra demostración, (ni justificación, prueba, etc.); esto podría interpretarse como que el término Geometría los remite a una Geometría escolar que aparece como escindida de la demostración, podríamos suponer es una Geometría no formal, centrada en los objetos geométricos y físicos, más que en el método matemático. Asimismo podríamos señalar que específicamente la Geometría a la que refieren estos/as estudiantes tiene una pobre relación con las demostraciones.

Asociados al término DEMOSTRACION aparece un mayor número de elementos tendientes a una descripción del concepto que en JUSTIFICACIÓN que estaría mas asociado a procesos. Esto puede estar relacionado con ser DEMOSTRACION un término usado en forma tardía en la Educación matemática y por lo tanto poco familiar para los/as estudiantes.

Para estos términos, los/as estudiantes sí asocian palabras relacionadas con el método matemático. A DEMOSTRACION los/as estudiantes asocian palabras del mismo tipo, es decir dan respuestas uniformes, sin embargo no ocurre lo mismo para JUSTIFICACIÓN. Lo cual nos hace pensar que, por una parte estos dos términos no poseen para los/as estudiantes el mismo significado y por otra que la representación del concepto de demostración, para estos/as estudiantes se presenta con mayor consistencia que el de justificación. Esto podría remitirnos al hecho de que la demostración se presenta como un contenido específico en un contexto matemático y no así la justificación, que representa un concepto más informal, esto puede deberse a que la demostración en matemática efectivamente se trata de un contenido más estructurado, más específico, demostrar en matemática es algo determinado, justificar, en cambio, puede significar muchas cosas

Según el AFCM, los/as estudiantes quedaron agrupados/as según las respuestas en la tarea 1 en cuatro clases: los/as que asocian exclusivamente *procesos* tanto a *demostración* como a *justificación*; aquellos que asocian tanto *procesos* como *objetos* a ambos términos; luego los/as que dan respuestas netamente *descriptivas* para ambos términos y por ultimo los/as que asocian *objetos* a *demostración.*

Del tipo de pruebas en tareas de *demostrar* (Tareas 2 y 3)

Respecto al tipo de pruebas producidas por los/as estudiante en las tareas 2 y 3 presentamos una tabla a continuación donde se muestra para cada estudiante, la edad, el avance en la carrera; grupo en que quedó clasificado según las palabras que asocia a los términos *demostración* y *justificación* y por último el tipo de pruebas que produjeron en general (según las asociaciones explicitadas por el AFCM realizado) en las Tareas 2 y 3.

	Edad	**Avance en al carrera**	**Grupo Tarea 1**	**TIPO de PRUEBA**
E1	Mas de 25	Avanzado	Procesos	Experiencia Mental
E2	22-24	Medio	O-P	Formales
E3	19-21	Medio	Descriptores	Empíricas Genérica-Crucial
E4	19-21	Medio	Procesos	Experiencia Mental
E5	Mas de 25	Medio	Objetos	Empíricas Genérica-Crucial
E6	22-24	Medio	O-P	Formales
E7	19-21	Medio	Objetos	Experiencia Mental
E8	19-21	Menor	Descriptores	Ingenuas
E9	19-21	Medio	Procesos	Ingenuas
E10	19-21	Medio	Procesos	Formales
E11	19-21	Medio	Objetos	Ingenuas- Crucial
E12	19-21	Medio	Objetos	Ingenuas
E13	22-24	Avanzado	Objetos	Ingenuas

La categoría que se le asignó a cada estudiante, responde al tipo de prueba que predomina en sus producciones ya que se observa que estos/as estudiantes suelen dar distintos tipos de prueba en los distintos ítem de una misma tarea. Entre los/as alumnos/as que dan pruebas intelectuales, vemos mayormente un cambio en el item 2b (contraejemplo) es decir que cuando tienen que "mostrar" un ejemplo que no cumple la proposición, tienden a satisfacerse con pruebas de un estatus menor que el formal, sin embargo los/as alumnos/as que tienden a dar pruebas experimentales repiten el tipo de prueba con el contraejemplo.

De las concepciones de los/as estudiantes sobre el *aprendizaje de la demostración.* Las 6 primeras preguntas abiertas de la entrevista.

Resaltamos los aspectos comunes de las ideas diferenciadas en los tres análisis de las 6 primeras preguntas (agrupadas de a 2) como componentes de la idea que poseen estos/as estudiantes respecto de *aprender a demostrar*; a saber:

- *una teoría de demostrar; lógica, métodos de demostración*
- *de lo que partís; lo que te dan*
- *las herramientas, el cómo; lo que se usa, la trampita*
- *la fundamentación, justificar cada paso*
- *la conclusión, a lo que tenés que llegar*

Los distintos aspectos que se presentan como relevantes para los/as estudiantes a la hora de aprender a demostrar no están presentes en todas las respuestas, por el contrario vemos que hay grupos de estudiantes que se centran sólo en uno de ellos.

En cuanto a las concepciones de los/as estudiantes sobre el aprendizaje de la Demostración que surgen del análisis de las 6 primeras preguntas de la entrevista y las relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen cada uno de los/as participantes al comienzo del estudio de la Geometría; encontramos principalmente tres grupos de ideas:

- *se aprende una teoría de demostrar;* como podría ser aprender los métodos de demostración o estudiar lógica; relacionadas con estudiantes de menor edad y menor avance en la carrera y que producen mayormente pruebas ingenuas
- *se aprende de entender demostraciones bien presentadas,* consideran que pueden aprender entendiendo los razonamientos de otros (profesor- libros), es decir suponen que pueden aprender de "ejemplos" y son estudiantes que producen principalmente pruebas de ejemplo genéricos o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo
- *a demostrar se aprende demostrando*; consideran que se aprende a demostrar haciendo sus propias demostraciones, asociada a los/as estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera y que producen mayoritariamente pruebas formales

En cuanto a lo que estos/as estudiantes consideran como una demostración correcta podemos diferenciar tres grupos de ideas:

- *una buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones: asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas.

- *una demostración es correcta cuando se tienen la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones. Este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental;
- *la corrección de una demostración se centra en la justificación de cada paso*, asociada a los/as estudiantes que producen pruebas formales

De las concepciones de los/as estudiantes sobre qué significa demostrar en matemática y en otras ciencias. Preguntas abiertas 7 y 8

Se pudo establecer una tipología de los/as estudiantes en tres clases en relación a las posibles ideas sobre el significado de la demostración en matemática y sobre la diferencia entre lo que significa demostrar en distintas ramas de la matemática y en otras disciplinas; realizándose una caracterización de cada una de estas clases:

- *En otras disciplinas es aproximado***.** Clase conformada por: E2; E3; E4; E5 y E6.

Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es aproximado, no formal; en matemática demostrar es decir porqué y la diferencia de la demostración en distintas ramas de la matemática esta dada por el grado de formalidad.*

- *En otras disciplinas es empírico.* Clase conformada por: E1; E8; E9 y E13.

Podríamos caracterizarla por la respuesta: *en otras disciplinas demostrar es evidenciar experimentalmente y en las distintas ramas de la matemática, demostrar es distinto en cuanto a la formalidad.*

- *Una demostración es una secuencia*: Clase conformada por: E7, E10, E11 y E12.

Puede caracterizarse por la respuesta: e*n Matemática la demostración es una secuencia y en todas las ramas es lo mismo (una secuencia) y en cualquier disciplina es lo mismo, es una secuencia. La demostración como una secuencia (partir- desarrollar – llegar)*

No hay una asociación clara entre los grupos de estudiantes según sus tipos de respuestas y los tipos de pruebas que producen. Salvo para el caso del grupo 1 en el cual no hay ningún estudiante de los que producen pruebas ingenuas. Estos están repartidos entre los grupos 2 y 3.

De las prácticas argumentativas que producen los/as estudiantes frente a la consigna demostrar y frente a la consigna justificar en la Tarea 3.

En la categorización de las respuestas de los/as estudiantes frente a la consigna Demostrar o Justificar, pudieron consensuarse las siguientes categorías:

- *Argumentación deductiva formal:* hemos considerado que realiza una argumentación deductiva formal cuando hace inferencias basadas en las hipótesis, propiedades o definiciones y presenta una secuencia lógica de expresiones simbólicas.
- *Argumentación deductiva coloquial:* consideramos que se trata de una argumentación deductiva coloquial cuando presenta inferencias basadas en las hipótesis; propiedades o definiciones, realizándola coloquialmente
- *Explicación coloquial:* Se consideró una explicación coloquial cuando el/la estudiante, clarifica (o se clarifica) la situación. En general presenta un *aspecto* de argumento deductivo sin llegar a hacer inferencias reales.
- *Explicación por evidencia o dibujo:* Será una explicación por evidencia cuando intenta evidenciar la proposición mediante la afirmación de que se cumple alguna propiedad o alguna definición sin argumentar, solo haciendo afirmaciones. Será una explicación por dibujo cuando muestra a través de un dibujo, afirmando sin argumentar.

Solo 4 estudiantes no diferencian entre consignas; dos de ellos producen pruebas formales, es decir que se encontrarían en un estadio mas avanzado del aprendizaje de la demostración; mientras que los otros 2 producen pruebas ingenuas. Para aquellos que se encuentran en una etapa formal; pareciera que el término justificación, en un contexto matemático los remite a la forma de validación matemática es decir hacia una prueba formal. Aquellos que se encuentran en una etapa inicial en cuanto al aprendizaje de la demostración no sienten otra necesidad de argumentación que la de dar una explicación, tanto si se les pide demostrar como justificar.

El resto de los/as estudiantes dan respuestas diferenciadas frente a las dos consignas, entre ellos encontramos:

- los que dan *argumentación deductiva coloquial* frente a la consiga demostrar y una *explicación por evidencia o dibujo* frente a la de justificar
- los que producen una *argumentación deductiva formal* ante la consigna demostrar y *explicación por evidencia* frente a justificar.
- los que dan una *explicación coloquial* frente a demostrar y los que dan una *explicación por evidencia o dibujo* para justificar

La argumentación deductiva o explicación que brindan los/as estudiantes en los distintos ítems estará relacionada con el tipo de pruebas que producen en general. Los/as estudiantes que producen pruebas formales al comienzo de la geometría tienden a dar argumentaciones deductivas formales en ambos casos, es decir tanto cuando se les pide demostrar como cuando se les pide justificar. En cambio los/as estudiantes que realizan pruebas de experiencia mental en los tres casos tienen respuestas diferentes ante las distintas consignas produciendo argumentaciones deductivas coloquiales para demostrar y explicaciones ante justificar. En los dos casos que producen pruebas genéricas cruciales la respuesta es muy similar al grupo anterior. Por ultimo los que producen pruebas ingenuas producen explicaciones en ambos casos, algunos dando una explicación coloquial cuando se les pide demostrar y por evidencia o dibujo cuando se les pide justificar; los que no cambian el tipo de respuesta explican por evidencia en los dos casos.

Frente a la consigna *demostrar* la mayoría de los/as estudiantes tiende a dar un argumento deductivo o al menos una explicación coloquial (que tenga *aspecto* de argumento deductivo); y ante la consigna *justificar* tienden a dar una explicación que puede ser por evidencia o dibujo. La mayoría de los/as estudiantes responden en forma diferenciada frente a las dos consignas, tendiendo a producir argumentos deductivos frente a la consiga demostrar y frente a la de justificar prefieren dar una explicación y se sienten con mayor libertad; aun para explicar lo que piensan en un sentido subjetivo.

Es notable los/as estudiantes que producen una explicación coloquial (con forma de demostración) y solo una explicación por dibujo o evidencia en justificar, como a pesar de no producir pruebas intelectuales hacen una diferencia evidente ante los distintos términos. Pareciera que al menos en teoría comprendieran que la demostración matemática tiene que ver con el razonamiento deductivo, y que frente a la justificación se sienten con mayor libertad de acción

CONCLUSIONES

Un grupo importante de estos/as estudiantes ofrecen pruebas empíricas al comenzar el estudio de la Geometría, incluso muchas pruebas ingenuas, a pesar de haber cursado ya materias donde se ha visto a la demostración como un contenido específico, esto podría estar relacionado con las palabras que asocian al termino Geometría, que pareciera los refieren a una Geometría escolar, no formal y que tiene una pobre relación con las demostraciones, por lo que en una etapa inicial de los estudios de Geometría las justificaciones empíricas parecen satisfacerlos.

Según las palabras asociadas por los/as participantes a los términos *demostración y justificación* en la tarea de asociación libre, encontramos indicios sobre una primera diferenciación entre las concepciones para *demostración*, que estarían relacionados con el concebirla como un *objeto*, (fijo, determinado, acabado, *eso que está en el libro*, *la que da el profesor*) o como un *procedimiento*, (algo que uno puede realizar, que se puede mejorar, puede crearse o re-crearse). Estas concepciones las volveremos a encontrar al indagar en que piensan estos/as estudiantes en cuanto a *cómo se aprende a demostrar*, donde un grupo de ellos/as considera que puede hacerlo de *buenos ejemplos* de demostraciones (objeto) y otro grupo que consideran que sólo se puede aprender a demostrar *realizándolo* (proceso).

Dado que en las producciones en las tareas 2 y 3, estos/as estudiantes dan distintos tipos de prueba en los distintos ítem de una misma tarea, podemos pensar que los estadios de aprendizaje de los/as estudiantes respecto de la pruebas que producen no son homogéneos, sino que dependen no sólo del dominio (Geometría), como señalábamos anteriormente, sino también del contexto de la tarea y quizás del significado que le dan al termino demostrar o justificar que aparece en los distintos ítems.

Respecto de esta última afirmación tenemos indicios de que estos dos términos no poseen para los/as estudiantes el mismo significado, ya que: por una parte el análisis de la tarea de asociaciones de palabras nos remite al hecho de que la demostración se presenta como un contenido específico en un contexto matemático y no así la justificación, que representa un concepto más informal, esto puede deberse a que la demostración en matemática efectivamente se trata de un contenido más estructurado, más específico. *Demostrar* en matemática es algo determinado que aparece mas tardíamente (que justificar) en la Educación, el termino *justificar,* en cambio, esta relacionado con ámbitos mas informales y puede significar muchas cosas. Por otra parte, en el análisis de sus practicas argumentativas encontramos que la mayoría de los/as estudiantes producen una argumentación deductiva coloquial bajo la consigna *demostrar* y una explicación por evidencia en *justificar*, diferenciando claramente los términos, en forma similar a los que producen una explicación coloquial y solo una explicación por dibujo o evidencia en justificar.

Para la minoría de estudiantes de los que concluimos que *demostrar y justificar* significan lo mismo, en un extremo se encuentran los que, muy alejados de construir argumentos deductivos que los lleven a una comprensión de la demostración matemática, explican, tanto para *demostrar* como para *justificar* , or medio de un dibujo y en el otro extremo, los que realizan argumentaciones deductivas formales tanto para demostrar como para justificar; estos últimos parecieran comprender el concepto de demostración ya que producen en general pruebas formales; para ellos justificar en un contexto matemático sería lo mismo que demostrar o dicho de otro modo que la demostración es la única justificación valida en matemática.

Nos parece relevante resaltar los aspectos que los/as estudiantes destacan como importantes al momento de aprender a demostrar: aprender una teoría de demostrar; lógica, métodos de demostración (particularmente el método por el absurdo); prestar atención a las hipótesis (lo que conozco, lo que ya sé, lo que me dan); tener en cuenta los axiomas; utilizar gráficos y figuras; aprender a fundamentar, a justificar; aprender a analizar (desarmar), a sintetizar (saber a donde llego) y a formalizar (necesidad de escribir).

Los/as estudiantes que producen pruebas ingenuas; están asociados principalmente al aspecto de *aprender una teoría de demostrar*; lo que nos hace pensar en cierta desconexión entre valorar sus aprendizajes de lógica por ejemplo (quizás sin relación a un contenido especifico) y las pruebas que producen estos/as estudiantes frente a una tarea de demostrar específica. En las respuestas de los/as estudiantes que producen pruebas formales encontramos presentes todos los aspectos citados en el párrafo anterior, es decir que su concepción de la demostración matemática es más rica; consideran que se aprende a demostrar *demostrando*; haciendo muchas demostraciones; es decir la conciben como un procedimiento; un hacer; una habilidad que se adquiere relacionado con los contenidos y desarrollándola concretamente.

Podemos describir un gradiente, en cuanto a lo que consideran estos/as estudiantes respecto a *cómo se aprende a demostrar*; entre la teoría de demostrar hacia la practica de demostrar. Desde los/as estudiantes que consideran que se aprende a demostrar, aprendiendo una *teoría de demostrar* y que producen pruebas ingenuas- es decir las pruebas más alejadas de una demostración matemática- ; luego aquellos que consideran que pueden aprender con demostraciones bien presentadas, entendiendo los razonamientos de otros – profesor, libros-, es decir consideran que pueden aprender de “ejemplos” y que principalmente son estudiantes que producen pruebas genéricas o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo; por último los/as estudiantes que consideran que se aprende a demostrar *demostrando;* haciendo sus propias demostraciones, idea que se asocia a los/as estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera (es decir que hacen la carrera en el tiempo estipulado) y que producen pruebas formales, esto es pruebas que podrían considerarse demostraciones matemáticas.

En cuanto a lo que estos/as estudiantes consideran como una demostración correcta; un grupo se centra en que una *buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones, se trata de un grupo de respuestas asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas. Otro grupo de estudiantes considera que una demostración es correcta cuando tienen *la seguridad de que es así*; parecieran confiar en sus propias argumentaciones, este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental; justamente las etapas en que comienzan las argumentaciones deductivas, aunque posiblemente en leguaje coloquial no formalizado. Por otra parte los/as estudiantes que producen pruebas formales, centran la corrección de una demostración mayormente en la *justificación de cada paso.*

Vimos que a estos/as estudiantes, en principio, la Geometría se les presenta con poca relación con las demostraciones; profundizando en el sentido de si conciben a la demostración matemática como distinta según el dominio de conocimiento dentro de la matemática – en álgebra, en geometría o en análisis matemático- podemos concluir que la mayoría de los/as estudiantes que consideran que *es lo mismo demostrar en cualquier rama de la matemática,* describen a la demostración matemática como partir de algo (hipótesis, axiomas, lo que te dan) y luego mediante algún proceso (secuencia lógica, hacer algo, desarrollando) llegas a algo (concluir, llegar), es decir una secuencia: partir – desarrollar – llegar. En cambio de los que opinan que demostrar *es distinto en las distintas ramas de la matemática* centran esta diferencia en el grado de simbolismo, formalidad, estrictez del álgebra versus lo aproximado, con números o dibujos y no formalidad del cálculo y la geometría. Hay un grupo de estudiantes que consideran que demostrar en todas las ramas de la matemática es decir porqué; sin embargo en algunas ramas es más formal (álgebra) que en otras (geometría y cálculo).

En cuanto a lo que consideran estos/as estudiantes respecto a *si demostrar significa lo mismo en otras disciplinas que en matemática* podemos describir tres grupos de estudiantes bien diferenciados: los que piensan que al igual que en matemática demostrar en cualquier disciplina es una secuencia partir-desarrollar – llegar; otro grupo que piensa que no es lo mismo dado que en otras disciplinas se demuestra *experimentalmente*, con datos y el tercer grupo que considera que en otras disciplinas se demuestra de manera no formal, aproximada.

El grupo de estudiantes que opina que tanto en matemática como en otras disciplinas demostrar es una secuencia lógica; equipara esta secuencia al método de otras disciplinas, esto junto con el dato de que la que la mayoría de ellos producen pruebas ingenuas enfrentados a la tarea de demostrar; nos hace preguntarnos sobre las características que tiene para estos/as estudiantes esa secuencia en matemática.

Este último hecho nos remite a la conclusión anterior de que en general los/as estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que éstas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso; se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a "mostrar" un caso donde "evidentemente" es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación. Lo que nos lleva a la reflexión de que conocer una "teoría" de la demostración no garantiza un aprendizaje de la demostración y que desarrollar contenidos de lógica en las asignaturas no garantiza este, sino que debiera ser un procedimiento presente en toda la formación del estudiante de matemática; a fin de que pueda el estudiante interiorizarlo como parte inseparable del método Matemático

Volviendo a la notable diferenciación que hacen estos/as estudiantes entre la demostración en álgebra, más formal y rigurosa y la demostración en geometría o cálculo, considerándola en estas ramas de la matemática como aproximada, que se puede hacer con ejemplos y no tan formal, pensamos que estas diferencias tienen que ver con su experiencia en las distintas asignaturas cursadas, lo que nos lleva a reflexionar sobre la coherencia en la formación de los futuros profesores, en cuanto a su formación específica en los procedimientos propios de la matemática. En cuanto a esta desconexión entre las asignaturas que cursan nuestros/as alumnos/as, nos lleva a plantearnos la necesidad de evidenciar la postura epistemológica de los distintos formadores de formadores.

Otro aspecto a destacar es que las repuestas de un grupo de estudiantes parecieran estar centradas más en la "tarea" que implica demostrar en general, que con validar conocimientos en relación a contenidos matemáticos específicos (conceptos – propiedades) implicados en las demostraciones. Es notable que en general no aparezca la demostración matemática como un medio para validar o convencerse de la verdad de una proposición, sino como un contenido dentro de las asignaturas. El aprender a demostrar aparece, más bien, relacionado con resolver la tarea de demostrar que se le plantea desde el exterior y no como una necesidad de validar los conocimientos. Es posible que estos aspecto no se hayan manifestado debido a la forma de indagación, ya que las preguntas que les realizamos están dirigidas hacia la demostración en general; pero se nos plantea aquí la posibilidad de buscar medios de indagación al respecto; es decir buscar un modo de sacar a la luz cómo se concibe a la demostración, si como una meta propuesta por las cátedras o un modo de validar una proposición o de convencerse de los conocimientos. Queda planteada esta posibilidad para seguir investigando porque de tratarse de una concepción arraigada, se convertiría en un obstáculo, muy importante para el aprendizaje de la matemática.

Sin duda los/as estudiantes encuentran útiles las justificaciones y explicaciones a la hora de hacer inteligible el carácter de verdad, de una proposición o de un resultado; los docentes que tenemos la responsabilidad de la formación matemática de los futuros profesores debiéramos orientarlos en el sentido de que sepan distinguir entre las argumentaciones que le sirven para comprender, o para explicar o para resolver algún problema de la demostración como una técnica especifica con sus propias reglas. En esto último acordamos con Balacheff (1999) cuando expresa que *comprender la demostración implica construir una relación particular al conocimiento como aquello que esta en juego en una construcción teórica, y por lo tanto implica renunciar a las libertades que uno podría tomarse, personalmente, en el juego de la argumentación*. Dado que una construcción cabal del conocimiento matemático no puede darse si no se logra una toma de conciencia efectiva de la naturaleza de la validación en matemáticas, debiéramos ocuparnos de que nuestros/as estudiantes se nutran de la argumentación pero no pierdan de vista las características esenciales de la demostración.

A modo de cierre podemos decir, que las concepciones sobre la demostración de los futuros profesores de matemática distan de ser simples y uniformes y es un punto importante a tener en cuenta por los interesados en la formación de los futuros docentes de matemática. Reconocer esta multiplicidad de significados y componentes nos sitúa en mejores condiciones para estudiar su evolución en el aprendizaje de los/as estudiantes y para colaborar en el aprendizaje de este procedimiento esencial del método matemático. Es nuestra tarea como formadores de profesores de matemática mediar para que nuestros estudiantes posean un marco conceptual sólido en matemática y para ello deberemos prestar especial atención al proceso de aprendizaje de la demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., (2003) C. D. Q. *Como quisiéramos demostrar*. Epsilon 57. España. 345-356

Arsac, G. (1987) E*l origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica*. Recherches en didactique des mathematiques, Vol 8, no 3, pp. 267-312, 1987.

Arsac, G.; Chapiron, G.; Colonna, A.;Germanin, G.; Guichard, Y.; Mante, M. (1992). *Initiation au Raisonnement Déductif au collége*. REIEC Año 2 Nro2-50. Presses Universitaires de Lyon (France). IREM.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Henesian, H., 1978/83. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas. Título original: *Educational psychology.* Now York, Holt Rinehart and Winton

Balacheff, N. (1987). *Processus de pruebe et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, vol 18 : 147-176

Balacheff, N. (1990): *Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education*. Learning of Mathematics, Vol. 10, Nº. 3, pp. 2-8.

Béncue Bertaut; M. (1991). *Análisis de datos textuales.Metodos estadísticos y algorímos.* Paris. CISIA

Benzecri, J. P. (1973) *Practique de l'analyse des données*. Tomo 3: Linguistique et lexicologie. Dunod. París.

Carretero, M., (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. AIQUE Grupo Editor. Buenos Aires.

Crivisqui, E. (1993) *Análisis Factorial de Correspondencias. Un instrumento de investigación en ciencias sociales.* Edición del Laboratorio de Informática Social de la Universidad Católica de Asunción. Paraguay.

Dreyfus, T. (1999). *Johnny can't prove*. Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration.* Educational Studies in Mathematics,22,233-261

Fischbein, E (1982). *Intuition an Proof.* For the learning of Mathematics. 3,2,9-24

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (1997). *Significado de la demostración en educación matemática.* PME XXI (Vol.2 pp. 313-320). Lahti, Finland.

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática.* Enseñanza de las Ciencias 19(3) 405 - 414 España

Ibáñez Jalón, M.J., (2002). C*uatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración.* Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 11-26.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Lebart, L, Morineau, A., Fénelon, J. (1979) *Traitement de Donnés Statistiques*. *Dunod, París*

Lebart, L.; Morineau, A.; Y Piron, M. (1995) *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle*. Dunod, Paris.

Lebart L., Salem A. y Bécue Bertaut M. (2000). *Análisis estadístico de textos*. Ed. Milenio.

Martínez Recio, A. (2002) *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 29-43

Montoro, V. y Juan; M. T. (2005). *Demostrar...demostrar...¿ Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría*. Memorias del VII

Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII. Interesados pedir a las autoras a vmontoro@crub.uncoma.edu.ar

Montoro, V. (2005). *Explorando la producción de los/as estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea.* Ponencia en XXVIII Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina. Salta. Septiembre. *Resumen en Actas* XXVIII REM - UMA. 2005. Interesados pedir a la autora a vmontoro@crub.uncoma.edu.ar

Montoro, V. 2009. *Prácticas argumentativas de estudiantes de profesorado frente a las consignas demostrar o justificar*. Revista de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Vol 24 – digital 24-1 [On CD-ROM]. Córdoba, Argentina. ISSN 0325-6308. http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/digital24-1/Investigacion24-1/1_Practicas_argumentativas.pdf

Montoro, V. 2008. *Qué piensan los estudiantes de profesorado de la demostración matemática*. Revista de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina. Vol 23 – digital 23-1 [On CD-ROM]. Córdoba, Argentina. ISSN 0325-6308. http://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-1 /Investigaci%F3n/Montoro_tra.pdf

Montoro, V. 2007*. Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración.* Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. Año 2 (1). Pp 101–121. ISSN 1850 - 6666

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol II. Princeton University Press: Princeton, NJ. [Trad. castellana: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid (1966)].

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1987). *Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?.* Infancia y Aprendizaje (38) pp35-52.

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1992). *Causal theories, reasoning strategies, and conflict resolution by experts and novices in Newtonian mechanics*. En A. Demetriou, M Shayer, y A Efklides, (eds). *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development. Implications and Applications for education*. Londres: Routledge.

Sáenz Castro, C., (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 47-62.

Schoenfeld, A. H. (1992) . *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS, Macmillan Publishing Company, N.Y., 1992, págs.334-370. (The University of California -Berkeley).

Siñeriz, L. y Ferraris C. (2005). *Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría*. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association 58*. pp 236-244