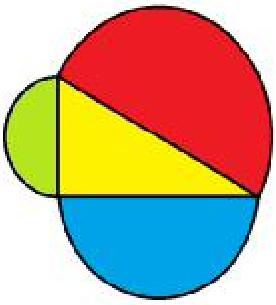
Una ampliación al teorema de Pitágoras

Marco Vinicio Vasquez Bernal



Resumen

Uno de los teoremas mas ampliamente difundidos en las matemáticas es el de Pitágoras, con sus múltiples demostraciones y aplicaciones, más en la educación actual su uso es mecánico y se lo ha reducido a una fórmula estática y fría, despojando a la misma de la grandiosidad que encarna la relación álgebra–geometría y que es la escencia de la mencionada herramienta de la matemática.

Es necesario entonces explicar y entender el sentido del teorema mencionado, para así explicar su relevancia científica, que se basa en la relación constante que existe entre la ciencia matemática y la realidad.

Una Ampliación al Teorema de Pitágoras:

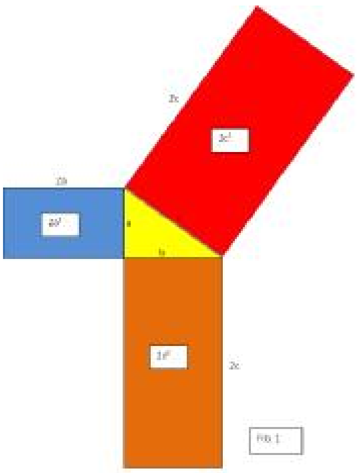
La versión ampliamente difundida y estudiada del Teorema de Pitágoras es

“La suma de las áreas de los cuadrados levantados sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado levantado sobre la hipotenusa”,

sin embargo es digno de curiosear que pasa si sobre los lados del triángulo rectángulo levantamos otras figuras.

Veamos qué pasa si levantamos rectángulos (Fig.1) cuyas alturas son el doble de la base (lados del triángulo).

Caso de rectángulos:



Si sumamos las áreas de los rectángulos se tendrá que $\mathbf{2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)}$**.**

Más como sabemos, la forma básica del teorema de Pitágoras expone que: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$**,** con lo cual se tiene que:

$\mathbf{2a^2 + 2b^2 = 2c^2}$**,**

y podemos concluir que: **la suma de los rectángulos, levantados en cada uno de los catetos de un triángulo rectágulo, cuyas alturas sean el doble de estos, es igual al áea del rectángulo levantado sobre la hitotenusa con una altura igual al doble de la misma.**

Es obvio además, que si construímos rectángulos en los lados del triángulo rectángulo, donde las alturas resulten de mutiplicar cada lado del triángulo rectángulo por un escalar, se tendrá lo siguiente. Si cada lado del triángulo lo multiplicamos por un valor, donde es un número real cualesquiera se tendrá que:

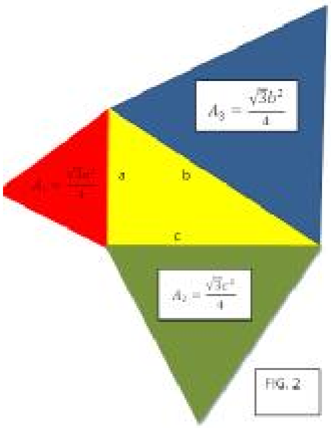
$$\lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda(a^2 + b^2),$$

y recordando que: $a^2 + b^2 = c^2$, se tiene que: $\lambda(a^2 + b^2) = \lambda c^2$. Esto permite expresar que

"La suma de los rectángulos, levantados en cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área del rectángulo levantado sobre la hipotenusa de ese triángulo, siempre y cuando los rectángulos sean semejantes".

Caso de triángulos equiláteros:

Para el caso de triángulos, primero veremos que pasa si sobre los tres lados del triángulo rectángulo levantamos triángulos equiláteros (Fig. 2):



Si sumamos las áreas de los triángulos equiláteros que se ubican el los catetos del triángulo rectángulo se tendrá que:

$$A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(a^2+b^2)}{4}$$

,

y como se sabe, la relación Pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, permite concluir que:

$$A_1 + A_2 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} = A_3.$$

Lo que comprueba lo requerido y permite concluir que

“La suma de las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área del triángulo equilátero construído sobre su hipotenusa”.

Caso de polígonos regulares:

Para desarrollar esta parte, deberemos recordar que un polígono regular de n lados, es una figura geométrica de lados iguales, que justamente su contorno, está conformado por esos n lados, y que el área puede encontrarse con la fórmula (Fig. 3):

$$A = \frac{nl^2}{4tg\left(\frac{180}{n}\right)}$$

Fórmula 1

Donde n es el número de lados del polígono regular y l la longitud del lado de ese polígono.

Entonces si sobre los tres lados de un triángulo rectágulo construímos polígonos regulares de seis lados (exágonos), tendríamos:

Haciendo algunos cálculos tenemos que:

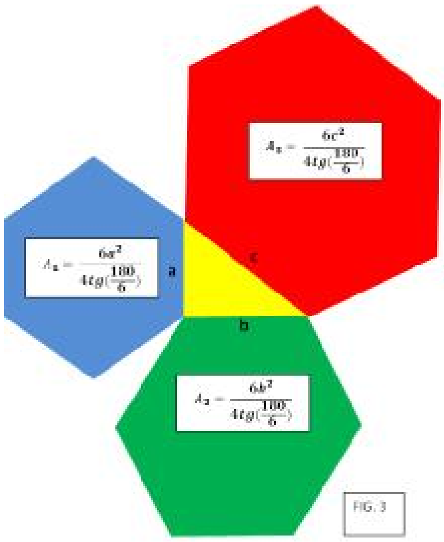


FIG. 3

$A_1 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$,

$A_2 = \frac{3\sqrt{3}b^2}{2}$,

$A_3 = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2}$.

Si sumamos $A_1 + A_2$,

$$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}b^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}(a^2+b^2)}{2}.$$

Aquí nuevamente debemos recordar que a y b son los catetos de un triángulo rectángulo, por lo que $a^2 + b^2 = c^2$. Reemplazando tendríamos:

$$A_1 + A_2 = \frac{3\sqrt{3}c^2}{2} = A_3.$$

Lo cual se demuestra que la suma de las áreas de los exágonos construídos sobre los catetos es igual al área del exágono construído sobre la hipotenusa.

En base de la *fórmula 1*, expuesta anteriormente, esto se puede generalizar para cualquier polígono regular.

"La suma de las áreas de los polígonos regulares de *n lados* construídos sobre los catetos es igual al área del polígono regular de *n lados construído sobre la hipotenusa de ese triángulo rectángulo*".

Caso del círculo:

Entendiendo que el círculo es una extensión de los polígonos regulares, cuando el número de lados se extiende hacia el infinito y recordando que el área del círculo es:

$$A = \pi r^2$$

Donde A, es el área, π es la constante π y r es el radio del círculo (Fig. 4).

Si sumamos $A_1 + A_2$, tenemos: $\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{8}$.

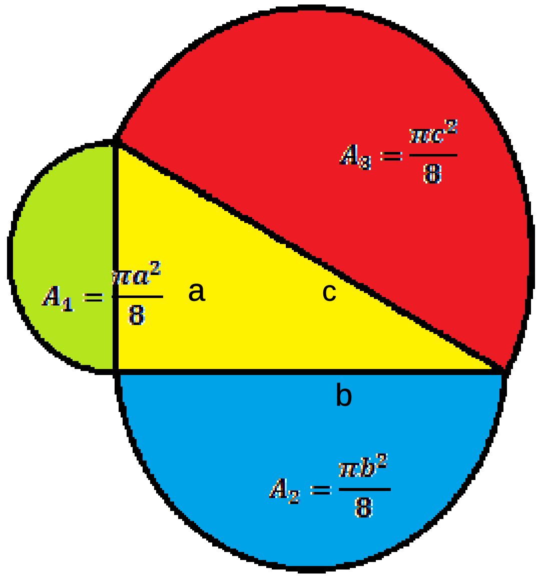


Fig. 4

Nuevamente como a y b son catetos del triángulo rectángulo y c su hipotenusa, se tiene que:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Que aplicando a lo desarrollado, se tiene que:

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi c^2}{8} = A_3.$$

Con lo cual se puede afirmar que***: "La suma de las áreas de los semicírculos levantadas teniendo como diámetro cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del semicírculo levantado, teniendo como diámetro a su***

hipotenusa".

Es claro que, si lo hemos comprobado para semicírculos, es fácil concluir que una igualdad similar se cumple para los círculos.

Caso de triángulos semejantes:

En este caso, deberemos recordar que se conocen como triángulos semejantes, aquellos cuyos respectivos lados mantiene una razón constante así:

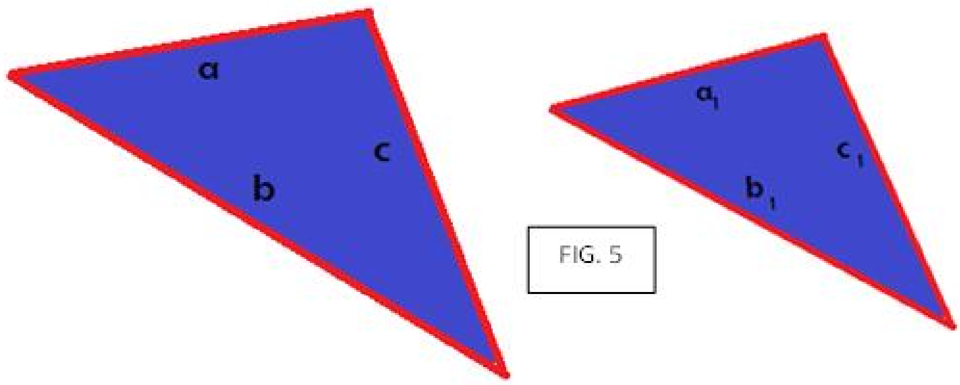


FIG. 5

Los dos triángulos son semejantes si y sólo si:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Ahora construiremos un triángulo rectángulo, levantando triángulos semejantes en cada uno de sus lados.

Con lo indicado anteriormente, y por las relaciones geométricas, podemos afirmar que la razón que relaciona los triángulos semejantes (Fig. 6), relaciona también las alturas respectivas, así tendremos:

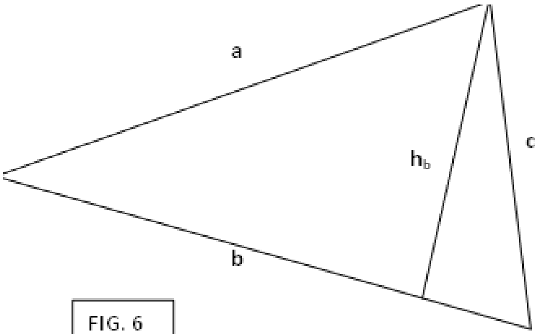
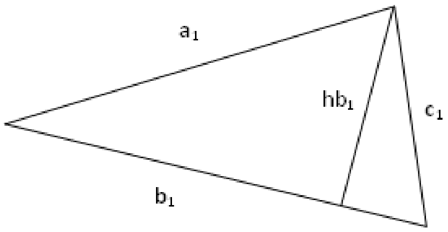


FIG. 6



$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{h_b}{hb_1}$$

El área de cada uno de estos triángulos será:

$$A = \frac{bh_b}{2} \text{ y } A_1 = \frac{b_1 hb_1}{2}.$$

Si construímos triángulos semejantes en los tres lados de un triángulo rectángulo tendremos que:

$$\boxed{A_1 = \frac{ah_a}{2},\ A_2 = \frac{bh_b}{2},\ A_3 = \frac{ch_c}{2}}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{ah_a}{2} + \frac{bh_b}{2}.$$

Sabemos que: $\frac{a}{c} = \frac{h_a}{h_c}$ y $\frac{b}{c} = \frac{h_b}{h_c}$,

de donde $h_a = \frac{ah_c}{c}$ y $h_b = \frac{bh_c}{c}$, entonces:

$$A_1 + A_2 = \frac{aah_c}{2c} + \frac{bbh_c}{2c} = \frac{(a^2+b^2)h_c}{2c},$$

que utilizando la relación pitagórica tendríamos que:

$$A_1 + A_2 = \frac{c^2h_c}{2c} = \frac{ch_c}{2} = A_3.$$

Entonces se puede afirmar:

Si levantamos triángulos semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los que se levantan sobre los catetos es igual al área del triángulo levantado sobre la hipotenusa".

Este resultado permite una generalización: Se sabe que las áreas de dos triángulos son iguales, si son iguales uno de los lados y la altura respectiva, por tanto: ***"Si levantamos***

triángulos en los tres lados de un triángulo rectángulo, cuyas alturas con respecto a los lados responden a una razón constante, la suma de las áreas de los triángulos levantados sobre los catetos es igual a la levantada sobre la hipotenusa".

A continuación demostraremos lo enunciado:

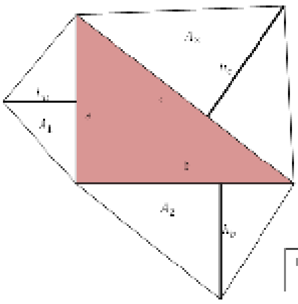


FIG 7

Como base tenemos un triángulo rectángulo abc (Fig. 7), y además:

$$\frac{a}{h_a} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}.$$

$$A_1 + A_2 = \frac{ah_a}{2} + \frac{bh_b}{2}.$$

Recordando las igualdades:

$$\frac{a}{h_a} = \frac{c}{h_c}, \ \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_c}.$$

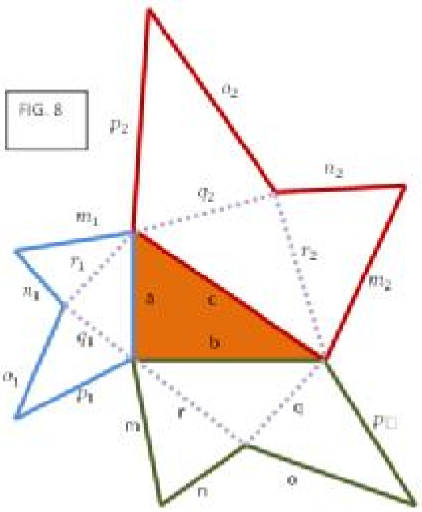
$$A_1 + A_2 = \frac{aah_c}{2c} + \frac{bbh_c}{2c}.$$

$$A_1 + A_2 = \frac{aah_c}{2c} + \frac{bbh_c}{2c} = \frac{(a^2+b^2)h_c}{2c} = \frac{c^2h_c}{2c} = \frac{ch_c}{2} = A_3$$

Caso de polígonos irregulares semejantes:

Para este caso simplemente deberemos recordar que un polígono semejante puede descomponerse en varios triángulos semejantes, concretamente un polígono irregular de n lados, puede descomponerse en n-2 triángulos, en consecuencia si sobre los lados de un triángulo rectángulo, construímos tres polígonos irregulares semejantes de n lados, cada uno de ellos podremos descomponerlo en n-2 triángulos, que a su vez son respectivamente semejantes, y como ya vimos que la suma de áreas construídas sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área de un triángulo rectángulo construído sobre su hipotenusa, para ello deberemos demostrar que ***"Los respectivos lados de polígonos irregulares semejantes construídos sobre un triángulo rectángulo mantienen la relación pitagórica"***.

Demostración:



En la figura 8 adjunta tomamos como base el triángulo rectángulo ***abc***, donde se tiene la relación pitagoórica $c^2 = a^2 + b^2$, sobre cada uno de los lados de ese triángulo se construyen polígonos irregulares semejantes que son:

$am_1n_1o_1p_1$, $bmnop$ y **$cm_2n_2o_2p_2$**

Para apoyar esta demostra-ción, descomponemos la fi-gura geométrica irregular de cinco lados en tres triángulos, para lo cual trazaremos la líneas ***q*** y ***r.***

Entonces es evidente que los triángulos:

$p_2o_2q_2$, poq y $p_1o_1q_1$ son semejantes entre si.

De igual forma los triángulos:

$m_2n_2r_2$, mnr y $m_1n_1r_1$, también son semejantes y consecuentemente los triángulos:

ar_1q_1 , brq y ar_2q_2 también son semejantes.

De donde podemos afirmar que:

$$\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{c} = \frac{r}{b}.$$

La relación pitagórica establece que: $c^2 = a^2 + b^2$

Que remplazando con lo anterior se tendría:

$$c^2 = \left(\frac{cr_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{cr}{r_2}\right)^2 = \frac{c^2r_1{}^2}{r_2{}^2} + \frac{c^2r^2}{r_2{}^2} = \frac{c^2(r_1{}^2+r^2)}{r_2{}^2}.$$

Dividiendo ambos miembros para c^2 se tiene que:

$$1 = \frac{({r_1}^2 + r^2)}{{r_2}^2}.$$

Por lo tanto:

$${r_2}^2 = {r_1}^2 + r^2.$$

De igual forma:

$$\frac{\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{q_2}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{b}}.$$

Y ançalogo a lo anterior se tendría:

$$c^2 = \left(\frac{cq_1}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{cq}{q_2}\right)^2 = \frac{c^2{q_1}^2}{{q_2}^2} + \frac{c^2q^2}{{q_2}^2} = \frac{c^2({q_1}^2 + q^2)}{{q_2}^2},$$

$$1 = \frac{({q_1}^2 + q^2)}{q^2}.$$

Y consecuentemente:

$$\boldsymbol{{q_2}^2 = {q_1}^2 + q^2}.$$

Esto permite indicar que también:

$$\boldsymbol{{p_2}^2 = {p_1}^2 + p^2},$$

$$m_2{}^2 = m_1{}^2 + m^2,$$

$$n_2{}^2 = n_1{}^2 + n^2,$$

y

$$o_2{}^2 = o_1{}^2 + o^2,$$

con lo cual queda demostrado lo indicado.

Si a este resultado le añadimos aquel caso de triángulos semejantes en bases que cumplan la relación Pitagórica, y recordando que el área de un polígono regular es igual a la suma de los triángulos que lo descompongan, por lo tanto, se puede afirmar que:

"Si se construyen polígonos irregulares semejantes en los lados de un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los polígonos irregulares construídos sobre los catetos es igual al área del polígono irregular construído sobre la hipotenusa".

Caso de segmentos circulares semejantes:

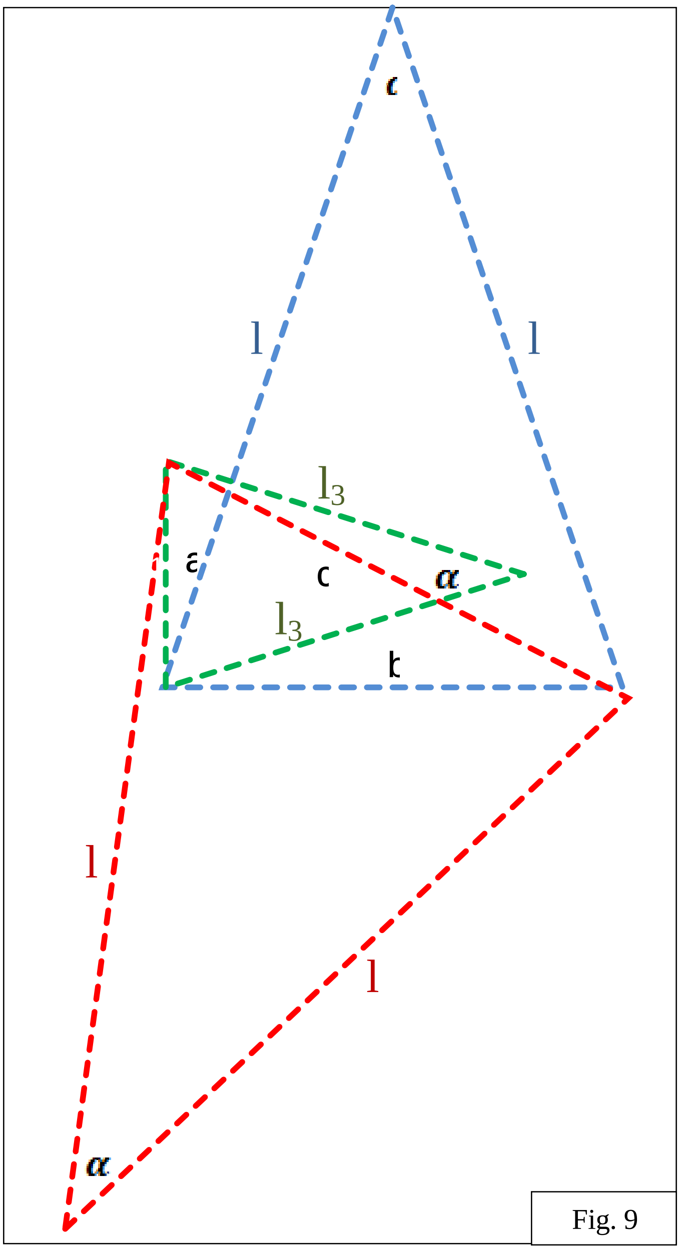


Fig. 9

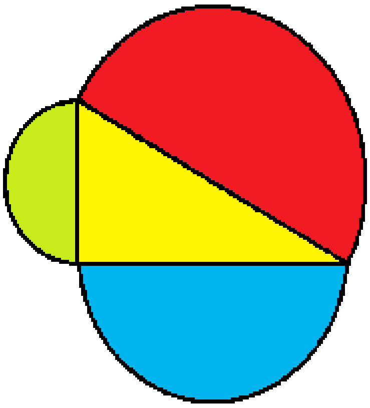


Fig. 10

Iniciare este caso indicando que los sectores circulares semejantes corresponden a sectores circulares con el mismo ángulo de apertura, en nuestro caso $\boldsymbol{\alpha}$.

Sabemos que los triángulos**:** $\mathbf{l_3cl_3}$, $\mathbf{l_2bl_2}$ y $\mathbf{l_1al_1}$ (Fig 9) son triángulos semejantes. Además $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$. En consecuencia, en base de lo que se ha visto: $\boldsymbol{l_1}^2 + \mathbf{l_2}^2 = \boldsymbol{l_3}^2$.

De la figura se observa que el área de cada sector circular es igual al área del cilindro circular menos el área del triángulo isósceles respectivo, así:

$$A_1 = \frac{\pi {l_1}^2\alpha}{2\pi} - \frac{{l_1}^2 sen(\alpha)}{2} = \frac{{l_1}^2(\alpha - sen(\alpha))}{2} ,$$

$$A_2 = \frac{\pi {l_2}^2\alpha}{2\pi} - \frac{{l_2}^2 sen(\alpha)}{2} = \frac{{l_2}^2(\alpha - sen(\alpha))}{2} ,$$

$$A_3 = \frac{\pi {l_3}^2\alpha}{2\pi} - \frac{{l_3}^2 sen(\alpha)}{2} = \frac{{l_3}^2(\alpha - sen(\alpha))}{2} .$$

Por lo que podemos calcular y proponer que:

$$A_1 + A_2 = \frac{l_1^{\,2}(\alpha - sen(\alpha))}{2} + \frac{l_2^{\,2}(\alpha - sen(\alpha))}{2},$$

$$A_1 + A_2 = \frac{(l_1^{\,2} + l_2^{\,2})(\alpha - sen(\alpha))}{2},$$

que remplazando el resultado ya presentado nos permite afirmar:

$$A_1 + A_2 = \frac{(l_3^{\,2})(\alpha - sen(\alpha))}{2} = A_3,$$

lo que permite afirmar que: ***"Si sobre un triángulo rectángulo construímos secciones circulares semejantes, la suma de las áreas construídas sobre los catetos es igual al área de la sección circular construída sobre la hipotenusa".***

Caso de figuras semejantes.

En general diremos que dos figuras son semejantes si y sólo si sus formas son idénticas, en el caso de polígonos cuando sus ángulos internos son idénticos, y si están limitados por lados no rectos, los arcos que los delimitan son iguales.

La semejansa no tiene que ver con la igualdad de los lados, estos mas bien deben ser proporcionales entre si.

A esa razon entre los lados respectivos, se conoce como razon de semejanza, se debe recordar el siguiente resultado:

"El área de una figura semejante a otra es igual al área de la primera por el cuadrado de la razón de semejanza".

Se observa esa semejanza en la figura 10, donde las tres figuras levantadas sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo son semejantes, así, la razn entre las áreas será:

$A_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 A_1$, la razón de semejanza entre las dos figuras es (b/a).

Si sumamos las áreas de las figuras que se construyen en los catetos:

$$A_1 + A_2 = A_1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 A_1 = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) A_1.$$

Recordando que a y b son catetos del triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es c, otra vez tenemos la igualdad pitagórica:

***$c^2 = a^2 + b^2$*,** entonces:

$$\mathbf{A_1 + A_2 = \left(\frac{c^2}{a^2}\right) A_1.}$$

Pero como el área levantada sobre la hipotenusa también es semejante a la levantada sobre el cateto ***a***, se tiene que:

$$\boldsymbol{A_3 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 A_1.}$$

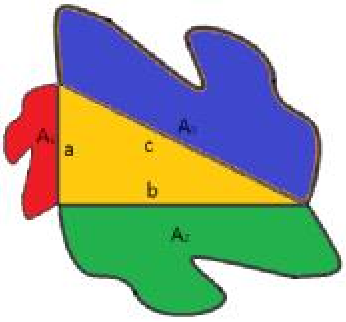
Con lo que podemos concluir que:

$$\boldsymbol{A_1 + A_2 = A_3.}$$

Lo que permite exponer el resultado deseado:

“Si sobre los lados de un triángulo rectángulo construímos figuras geométricas semejantes, la suma de las áreas construídas

sobre los catetos es igual al área construída sobre su hipotenusa".



Resultado Sobre Volúmenes:

La realidad percibida por el hombre es una realidad de tres dimensiones, donde el concepto de área es una abstracción, al igual que la línea o el punto, por lo que es fundamental recordar que un volumen resulta de multiplicar el área por su profundidad o espesor, lo que permite la siguiente aseveración:

"Si sobre las tres caras rectangulares de un prisma que tiene como base un triángulo rectángulo, construímos prismas que tengan como bases áreas semejantes entre si, la suma de los volúmenes construídos en las caras correspondiuentes a los catetos es igual al volunen del prisma semejante construído sobre la cara de la hipotenusa".

Aseveración que a simple vista no parece tener nada que ver con el teorema de Pitágoras, pero que en realidad, muestra la genialidad del mismo, y resulta de explicación obvia.

BIBLIOGRAFÍA:

PAUL STRATHERN: *Pitágoras y su teorema*. Siglo XXI de España Editores. Madrid, 1999

- LOOMIS E. S.: *The Pythagorean Proposition*. NCTM. Míchigan, 1940
- GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.: *Pitágoras. El filósofo del número*. Nivola. Madrid, 2001
- MARTÍNEZ DELGADO, ALBERTO. : *El Teorema De Pitágoras: Originalidad De Las Demostraciones*. Madrid, 1984.

marvas123@hotmail.es .- Cañar – 2012.