

UNA SÍNTESIS DEL CÁLCULO Y LA GEOMETRÍA: LOCALIZACIÓN DEL PUNTO DE FERMAT.

ANTONIO SÁNGARI^{1,2} CRISTINA EGÜEZ^{1,2}

¹Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta

²Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta

Emails: asangari2000@gmail.com, criseguez@gmail.com

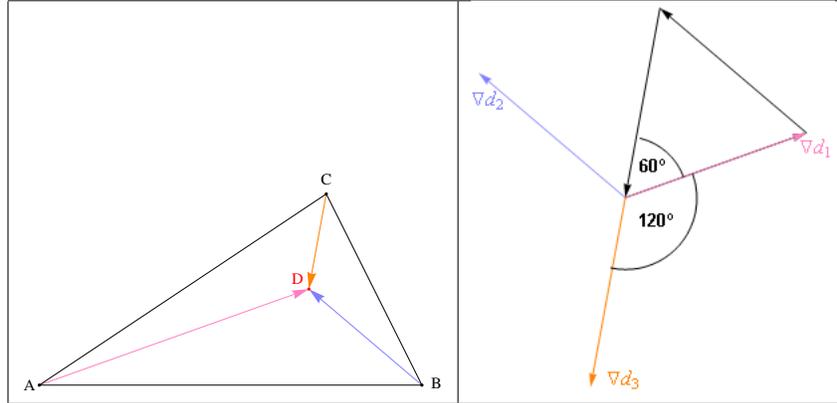
1. FUNDAMENTACIÓN

En muchas oportunidades un ejercicio planteado en un determinado contexto resulta sencillo, si se lo saca de ese contexto. La inercia intelectual muchas veces nos impide resolver un problema debido a que pretendemos que un método se adapte a un problema en vez de tratar de resolver el problema. Para paliar este vicio, en la concepción de los autores de este trabajo, es necesario tratar de dar, siempre que los recursos lo permitan, más de una perspectiva de los problemas y de sus soluciones. Esta es una de las razones por las que se pensó en desarrollar el tema de la localización del punto de Fermat. Aunque este problema es muy conocido como aplicación de la optimización en el ámbito del cálculo de varias variables, no es común que se lo enfoque desde la geometría elemental. Por otro lado reconocemos la importancia de la visualización de una situación problemática, por lo que hicimos uso de programas de cálculo y de dibujo. Por ejemplo, es importante tener idea de las posiciones relativas de las curvas de nivel cuando se busca un extremo de una determinada función.

2. DESARROLLO

Problema. Dados tres puntos A , B y C no alineados, encontrar el punto D del plano que minimiza la suma de las distancias.

<http://www.unsa.edu.ar/~asangari/fermat>

CUADRO 1. Configuración de los ∇d_i

2.1. Análisis previo de la situación. Sean $A(0,0)$, $B(a,0)$ y $C(b,c)$ puntos fijos. Sea $D(x,y)$ un punto variable. La función que tenemos que minimizar es

$$(2.1) \quad f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{d_1} + \underbrace{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}_{d_2} + \underbrace{\sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2}}_{d_3}$$

y el gradiente de (2.1) (que existe en todo el plano, salvo en los puntos A , B y C) tiene que ser $(0,0)$ en el mínimo. Entonces

$$(2.2) \quad \nabla f = \frac{(x,y)}{d_1} + \frac{(x-a,y)}{d_2} + \frac{(x-b,y-c)}{d_3} = (0,0)$$

La expresión (2.2) muestra que los vectores ∇d_i son unitarios y son paralelos y en el mismo sentido que los segmentos orientados que van desde los vértices del triángulo ABC al punto $D(x,y)$ (Ver cuadro 1).

Como la suma en (2.2) es el vector cero, los vectores ∇d_i pueden disponerse como los lados de un triángulo equilátero. Dado que el circuncentro de un triángulo equilátero determina, con cada pareja de vértices, triángulos congruentes, entonces, los ángulos en este circuncentro serán de 120° (Ver figura 2.1).

Esto nos permite obtener una consecuencia interesante e inmediata: Si el mínimo *estuviera* en el interior del triángulo, el ángulo con vértice en este punto que subtiende a los lados del triángulo sería de 120° .

Y entonces, recíprocamente, si el triángulo no tiene ningún ángulo mayor que 120° el mínimo se encontrará en un punto que subtienda los lados con un ángulo de 120° , y por tanto en su interior. También podemos observar, que si el triángulo tiene un ángulo mayor o igual que 120° entonces el mínimo debe estar en alguno de los puntos A , B o C . Recordando el

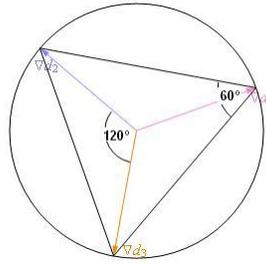


FIGURA 2.1. Circuncentro de un triángulo equilátero

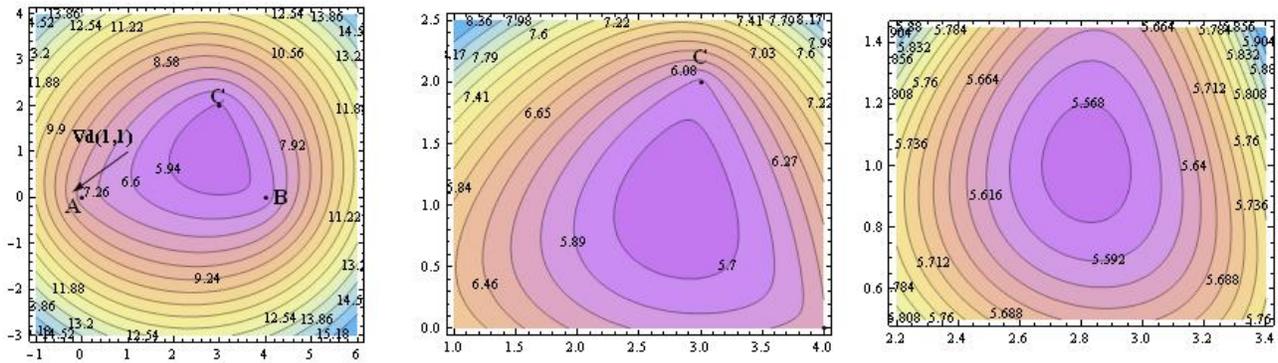


FIGURA 2.2. Curvas de nivel de distinta aproximación

muy conocido resultado de geometría elemental: “A ángulos mayores se oponen lados mayores” concluimos que el mínimo debe estar en el vértice correspondiente al ángulo obtuso. En síntesis, sea cual sea el triángulo, o el mínimo se encuentra en el interior del triángulo, o en uno de los vértices (donde la función no es diferenciable).

2.2. Resolución gráfica del problema. Para convencernos de estos resultados razonemos, primero, gráficamente:

Los gráficos de la figura 2.2 representan dibujos de curvas de nivel de la función (2.1) disminuyendo el rango de visualización, para conseguir mayor precisión.

Para este caso tomamos $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ y $C(3, 2)$. Podemos observar que a medida que nos acercamos aproximadamente a la curva de nivel 5,568, las curvas de nivel se “separan” más. Esto significa que la función debe decrecer en ese sentido. Además, debido a la forma de la función (2.1) y a que las curvas de nivel son cerradas podemos conjeturar que la función alcanzará un mínimo. Hagamos un dibujo más preciso aún para ilustrar esta conjetura (Ver figura 2.3).

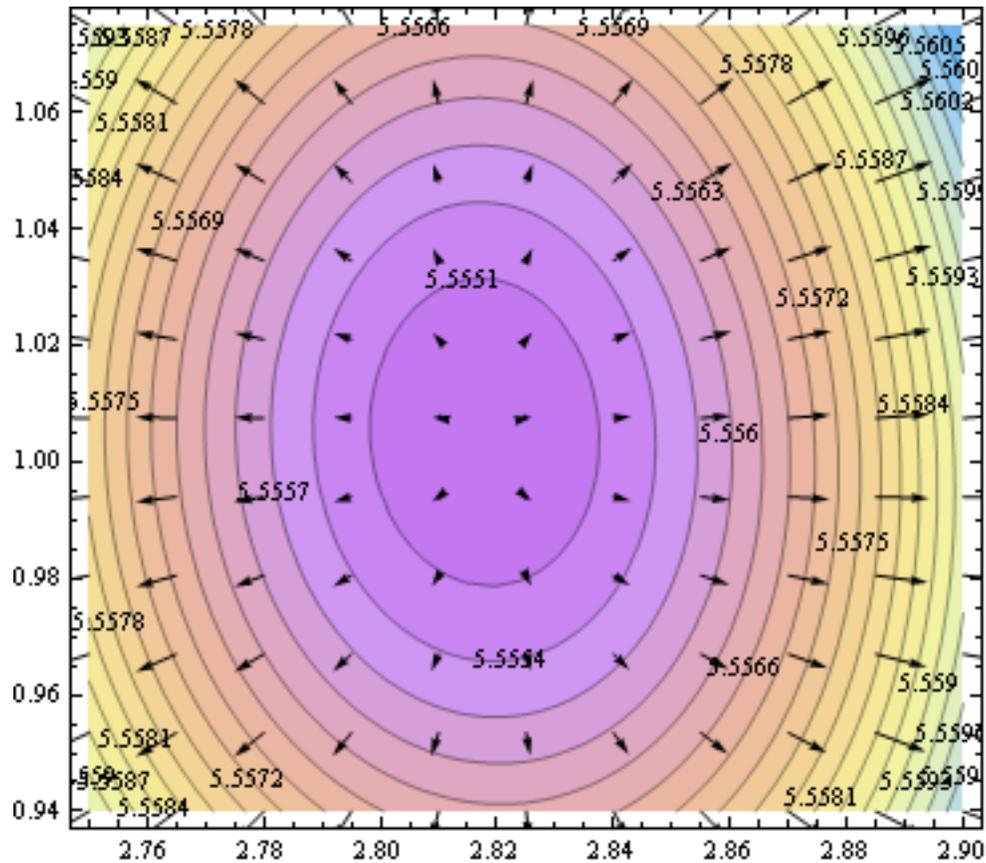


FIGURA 2.3. Curvas de nivel más localizadas

Observamos en la figura 2.3, que a medida que las curvas de nivel se separan, acercándose al mínimo, la longitud de los gradientes disminuye de manera proporcional.

2.3. Resolución analítica. Tratemos ahora de hacer una validación analítica de nuestra conjetura (ver [2]). La ecuación (2.2) se descompone en dos ecuaciones

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{x}{d_1} + \frac{x-a}{d_2} + \frac{x-b}{d_3} &= 0 \\ \frac{y}{d_1} + \frac{y}{d_2} + \frac{y-c}{d_3} &= 0 \end{aligned}$$

que en nuestro caso sería

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{x}{d_1} + \frac{x-4}{d_2} + \frac{x-3}{d_3} &= 0 \\ \frac{y}{d_1} + \frac{y}{d_2} + \frac{y-2}{d_3} &= 0 \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones (2.3) deducimos que:

$$\left(\frac{x}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{d_2}\right)^2 + 2\frac{(x-0)(x-a) + (y-0)(y-0)}{d_1d_2} = \left(\frac{x-b}{d_3}\right)^2 + \left(\frac{y-c}{d_3}\right)^2$$

Resulta:

$$(2.5) \quad 1 + 2\frac{(x-0)(x-a) + (y-0)(y-0)}{d_1d_2} = 0$$

Notamos que:

$$\frac{(x-0)(x-a) + (y-0)(y-0)}{d_1d_2} = \frac{\langle (x-0, y-0), (x-a, y-0) \rangle}{d_1d_2} = \cos(\widehat{uv})$$

con $u = D - A = (x-0, y-0)$ y $v = D - B = (x-a, y-0)$. Por lo tanto, la ecuación (2.5) es equivalente a

$$\cos(\widehat{uv}) = -\frac{1}{2}$$

y esto implica que $\widehat{uv} = 120^\circ$, como esperábamos.

Además, haciendo los cálculos correspondientes del Hessiano de la función (2.1) vemos que, si tiene un punto crítico en los puntos donde es infinitamente diferenciable, entonces ese punto crítico será un mínimo.

Resolvimos el sistema (2.4), en forma numérica, encontramos que el mínimo es 5,55485... y se encuentra en el punto (2,8179048..., 1,0050136...).

2.4. Resolución geométrica. Por último, encontremos la distancia mínima mediante razonamientos que sean puramente geométricos (ver [1]):

Sea el triángulo ABC sin ningún ángulo (interior) mayor de 120° como muestra la figura 2.5.

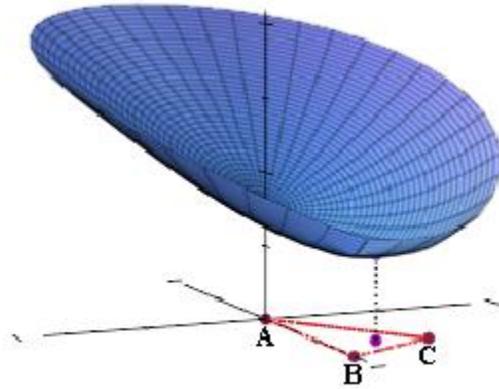


FIGURA 2.4. Gráfico de la función 2.1

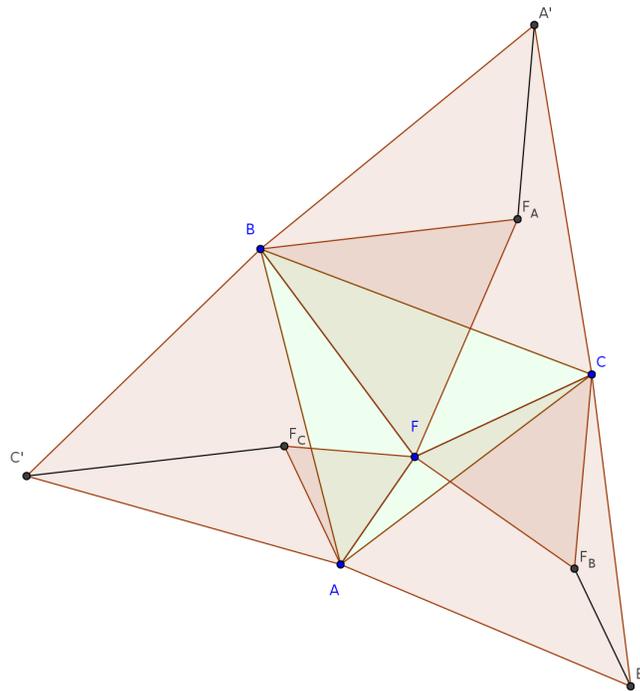


FIGURA 2.5. La poligonal de menor longitud entre dos puntos es el segmento que une esos puntos.

Tomemos un punto F cualquiera en el interior del triángulo. Tracemos los triángulos equiláteros AFF_C , BFF_A , CFF_B , ABC' , CAB' y BCA' . Como por construcción, los ángulos F_CAF y $C'AB$ son congruentes, entonces los ángulos BAF

y $C'AF_C$ son congruentes. Por tanto, los triángulos BAF y $C'AF_C$ son congruentes, por el criterio lado-ángulo-lado. Entonces los segmentos BF y $C'F_C$ son congruentes. Luego, la poligonal $C'F_CFC$ tiene la misma longitud que la suma de las distancias de F a los vértices A , B y C . Si consideramos el punto F móvil, entonces cuando F esté alineado con C , F_C y C' , la poligonal $C'F_CFC$ tendrá la menor longitud. Pero cuando esto suceda, $\widehat{AFC} = 120^\circ$ como esperábamos.

ANÁLISIS

A partir del planteo de la condición necesaria para la existencia del punto mínimo, surge una interesante y sencilla manera de localizar geoméricamente dicho punto a través de propiedades elementales de los triángulos equiláteros. Se estima gráficamente el resultado, a partir de conjeturas sobre las características del gradiente y de las curvas de nivel, y luego se confirman los resultados anteriores. El desarrollo analítico para encontrar el mínimo, se realiza a partir de las condiciones que establece el cálculo diferencial y, de manera singular, por medio de relaciones que definen un producto escalar, se obtiene el resultado estimado gráficamente. Las coordenadas del punto D se encuentran numéricamente. La dificultad para hallar analíticamente las coordenadas x e y del punto D hace relevante el método geométrico para su localización. El desarrollo geométrico, se basa en la construcción de triángulos equiláteros y en relaciones entre ángulos congruentes, lo que permite apreciar la simplicidad del método y la belleza de la geometría.

El caso de los puntos donde no existe el gradiente, admite también un tratamiento interesante, pero por excesivo, no se considera en este trabajo.

CONCLUSIÓN

Este enfoque de resolución requiere de una suficiente atención dedicada al problema para activar y estimular la memoria, consolidar los conocimientos anteriores y aplicarlos de manera útil en la búsqueda de solución. La identificación, el análisis y la interpretación de los datos disponibles inicialmente, permitieron incorporar nuevas ideas para la resolución del problema e integrar adecuadamente diversos tópicos tanto del cálculo como de la geometría, para obtener el resultado de distintas maneras. Por otra parte, la posibilidad de utilizar un soft adecuado permitió que se llevara a cabo este enfoque.

REFERENCIAS

- [1] H. S. M. Coxeter, FUNDAMENTOS DE GEOMETRÍA. Editorial Limusa
- [2] Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, ANÁLISIS MATEMÁTICO. Editorial Kapelusz