“Sobre la enseñanza del cálculo en el nivel medio”

La derivada en los problemas de optimización

Trabajo de investigación áulica- reflexiones acerca de la enseñanza del cálculo en el nivel medio

Lic. Raúl Paz Zanini, Prof. María Silveria López

Mayo de 2011

Trabajo de investigación.

“Sobre la enseñanza del cálculo en el nivel medio”….la derivada en los problemas de optimización.

Lic. Paz Zanini, Raúl Eduardo,

Prof. López, María Silveria.

Centro de Educación Técnica Nº1 “Don Antonio Sánchez Platero”-

Escuela del Valle -Prov. De Río Negro-Argentina.

raulpzanini@hotmail.com- silhadas@gmail.com

Secundario- Nivel medio

Fundamentación

Desde la labor docente, hemos prestado atención a las problemáticas que surgen a la hora de encarar la enseñanza del cálculo (el concepto de derivada, en especial el desarrollo y resolución de problemas de maximización) en la escuela secundaria (modalidad técnica y Bachiller) lo cuál nos llevó a investigar desde un trabajo autodidacta, cuáles son los factores que dificultan la apropiación de los principales conceptos, y cuáles son las estrategias que permiten revertir este proceso.

De los resultados obtenidos, utilizando diferentes evaluaciones formativas-sumativas e instancias transversales como pequeños problemas de optimización, es visible que, a nuestra interpretación, que la principal causa es la imposibilidad o dificultad de “ver” o “asumir” la matemática como una unidad de pensamiento integrado. Es decir interpretar los datos de un problema desde las diferentes ramas que componen la matemática en su conjunto y la significatividad que los conceptos pueden representar.

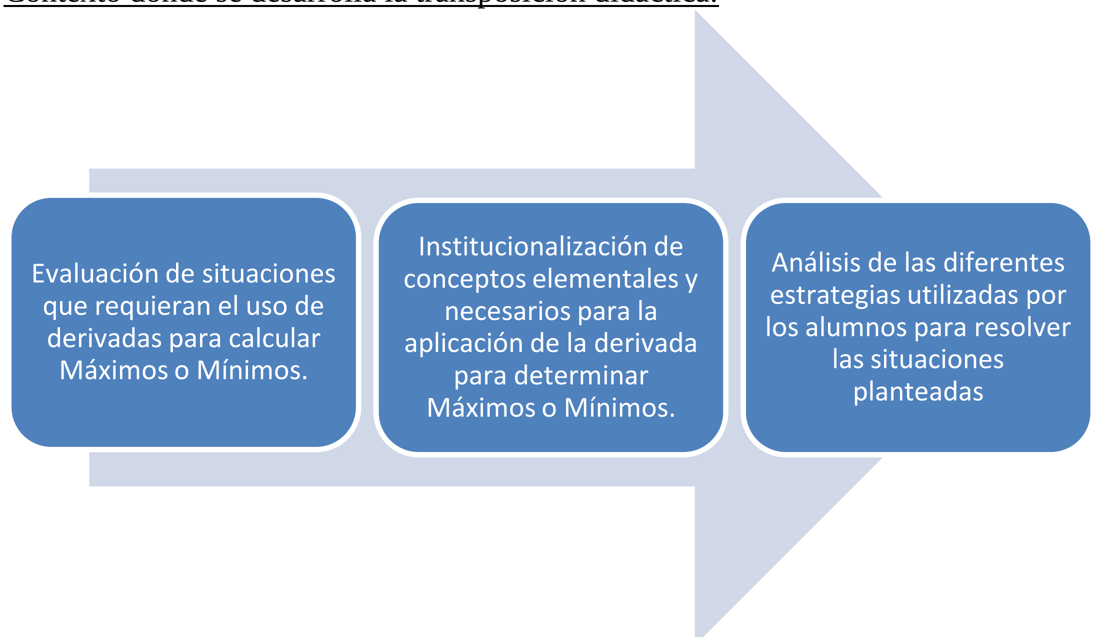
La experiencia que detallamos a continuación se llevó a cabo en dos escuelas secundarias: una de gestión estatal de modalidad técnica y otra de gestión privada en la ciudad de General Roca, provincia de Río Negro. Los cursos seleccionados para esta experiencia fueron un sexto y un quinto año, respectivamente. Los alumnos que concurren a esta escuela son adolescentes de clase media cuya edad oscila entre los 16 y 19 años. Por características propias de las escuelas, la asignación horaria al estudio de la matemática es superior a la de otras instituciones.

La experiencia resulta interesante, dado que representa una nueva mirada, pues propone la idea de acercar el "cálculo" al nivel medio, respetando en cada caso la franja etaria con la que se trabaja.

Organigrama sobre la planificación, desarrollo y evaluación de este trabajo.

Desde el surgimiento del trabajo, la evaluación pre y pos ejecución y durante su ejecución, fuimos interactuando conscientemente de manera tal que no se desvíen nuestros objetivos, que se centraba en desarrollar estrategias que pongan al alcance de los estudiantes la necesidad de aplicar la noción de derivada de resolver una situación, en especial enfocándonos en los problemas de maximización . Por ello plasmamos, mediante una síntesis gráfica, como fue el desarrollo del mismo.

Contexto donde se desarrolla la transposición didáctica:



OBJETIVOS DEL TRABAJO:

- ✓ Proponer a los alumnos la visión del cálculo como herramienta funcional de pensamiento y aplicación.
- ✓ Propiciar una metodología de trabajo dinámica y de retroalimentación.
- ✓ Posibilitar el tratamiento del cálculo mediante el planteo y resolución situaciones problemáticas, además del empleo de diferentes tipos de software.
- ✓ Generar en los estudiantes gusto por las actividades matemáticas.

RECURSOS UTILIZADOS:

- ✓ Fotocopias con las situaciones problemáticas.
- ✓ Netbooks, de los alumnos
- ✓ Software Winplot , Graph.
- ✓ Aulas, cañón, retroproyector, tizas, pizarras, afiches, entre otros.

TIEMPO:

- ✓ El desarrollo de este trabajo tiene una duración aproximada de :
  -2 (dos) meses de planificación. (diciembre de 2010 a febrero de 2011)
  -15(quince) días de evaluación previa puesta en marcha. (8 al 23 de febrero de 2011)
  -2 1/2 (dos y medio) meses de ejecución. (22 de febrero al 14 de mayo de 2011)
  -10(diez) días de evaluación pos-ejecución (15 al 25 de mayo de 2011)

<u>*PROBLEMAS:*</u> La selección de los problemas se efectuó cuidadosamente, de manera de que puedan tener solución, al principio, sin aplicar necesariamente el concepto de derivada ni de máximo ni mínimo.

A continuación presentamos cuales fueron las situaciones planteadas.

<u>Situación Nº 1:</u>

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.

Solución:

Se debe de maximizar el producto P de dos números positivos.

Sean estos números: x, y

Luego $P = xy$

Como la suma de esos números es 10, entonces $x + y = 10$ es la **ecuación auxiliar**, de donde $y = 10 - x$.

Entonces: $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Se debe de determinar el valor de x que hace máxima la función $P(x)$

Derivando: $P'(x) = 10 - 2x$

Valores críticos: $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x - 5$

En $x = 5$ se tiene un valor crítico, y se debe estudiar si es un valor mínimo o un valor máximo.

Como $P''(x) = -2$ entonces $P''(x) = -2 < 0$ por lo que en $x = 5$ se tiene un valor máximo.

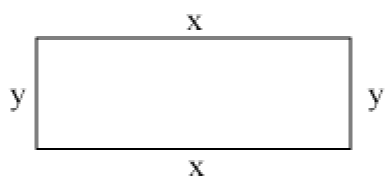
Si $x = 5$ entonces $y = 10 - 5 = 5$. Luego, los números positivos cuyo producto es máximo y cuya suma es 10 son ambos iguales a 5.

Situación Nº2:

a) ***Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?***

Solución:

Se debe maximizar el área A de un rectángulo:



Designemos con "*x*", "*y*" las longitudes de los lados del rectángulo.

Luego $A = xy$

Como el perímetro del rectángulo es 120 m. entonces la ecuación auxiliar es: $2x + 2y = 120$ de donde $y = 60 - x$.

Luego $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como $A'(x) = 60 - 2x$ y $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$ entonces $x = 30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada.

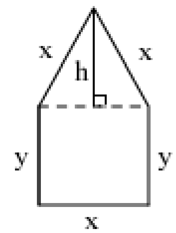
Como $A''(x) = -2x$ y $A''(30) = -2(30) = -60 < 0$, entonces $x = 30$ es un valor máximo.

Si $x = 30$ entonces $y = 30$ por lo que un cuadrado de lado 30 es el rectángulo de mayor área y perímetro 120m.

b) Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

Solución:

En este caso se debe maximizar el área de la siguiente figura geométrica:



Se han señalado con las letras "*x*", "*y*" las longitudes de
los lados de la ventana.

El área de la ventana está dada por la suma de las áreas del triángulo y del rectángulo.

Área del triángulo: $\frac{x \cdot h}{2}$

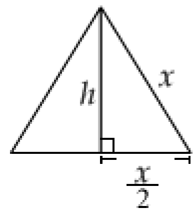
Área del rectángulo: xy

Área total: $A = xy + \frac{xh}{2}$

Como el perímetro de la ventana es 3 metros entonces: $2y + 3x = 3$ de donde $y = \frac{3 - 3x}{2}$ es una ecuación auxiliar.

Luego: $A = x(\frac{3 - 3x}{2}) + \frac{xh}{2}$. Debemos escribir h también en términos de x.

Se tiene en el triángulo:



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$, $h > 0$

$$A(x) = \frac{1}{2}(3x - 3x^2) + \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Luego:

$$A(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$A'(x) = \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Determinamos los valores críticos

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$$

Luego:

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{6 - \sqrt{3}}$$

El valor crítico es $x = \frac{3}{6-\sqrt{3}}$

Utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene que

$A''(x) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, y , $A''\left(\frac{3}{6-\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$

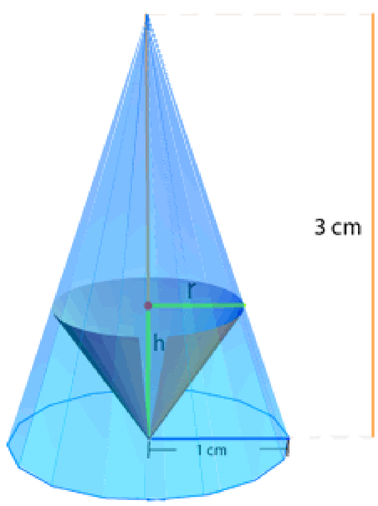
de donde $x = \frac{3}{6-\sqrt{3}}$ es un valor máximo.

Luego, la longitud de la base del rectángulo debe ser $\frac{3}{6-\sqrt{3}}$ para que la ventana tenga el área máxima.

La altura del rectángulo debe ser: $\frac{9-\sqrt{3}}{12-2\sqrt{3}}$ y el lado del triángulo es $\frac{3}{6-\sqrt{3}}$.

Situación Nº 3:

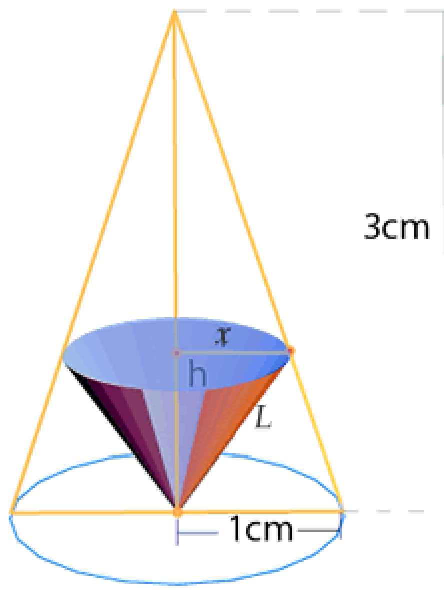
a) ***Determinar las dimensiones del cono de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1cm y altura 3cm, como se muestra en la figura siguiente:***



Solución:

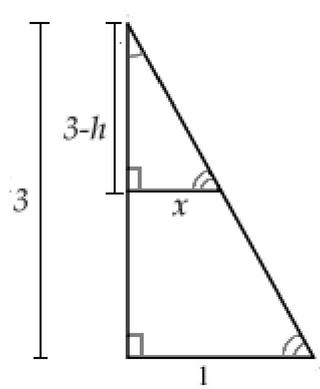
Hay que maximizar el área lateral del cono inscrito.

Las dimensiones de éste son: x radio de la base, h altura y se especifican en la figura de la siguiente manera:



El área lateral de un cono es $A = \pi x L$.

Una ecuación auxiliar se puede obtener por medio de semejanza de triángulos de la siguiente forma:



Además $L=\sqrt{h^2+x^2}=\sqrt{(3-3x)^2+x^2}=\sqrt{10x^2-18x+9}$

Sustituyendo en la ecuación del área lateral $A=\pi xL=\pi x\sqrt{10x^2-18x+9}$

Determinemos los puntos críticos:

$$A'(x)=\pi\sqrt{10x^2-18x+9}+\frac{\pi x(10x-9)}{\sqrt{10x^2-18x+9}}$$

$$A'(x)=\frac{\pi(20x^2-27x+9)}{\sqrt{10x^2-18x+9}}=\frac{\pi(4x-3)(5x-3)}{\sqrt{10x^2-18x+9}}$$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow (4x-3)(5x-3)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$, ó $x=\frac{3}{5}$

Por lo tanto, los valores críticos son $x=\frac{3}{4}$ y $x=\frac{3}{5}$

Determinemos cuál de esos valores es un valor máximo utilizando el criterio de la primera derivada.

	$-\infty$ a $\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$ a $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ a $+\infty$
$4x-3$	$-$	$-$	$+$
$5x-3$	$-$	$+$	$+$
$A'(x)$	$+$	$-$	$+$
$A(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Como $A(x)$ crece para $x\in\left]-\infty,\frac{3}{5}\right[$ y decrece para $x\in\left]\frac{3}{5},\frac{3}{4}\right[$ entonces $x=\frac{3}{5}$ es un valor máximo.

Como $A(x)$ decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ y crece para $x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ entonces $x = \frac{3}{4}$ es un valor mínimo.

Luego el valor que nos interesa es $x = \frac{3}{5}$

Por lo tanto, el radio de la base del cono inscrito es $x = \frac{3}{5}$ cm., y la altura es $h = \frac{6}{5}$ cm.

<u>Situación Nº4:</u>

Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una semiesfera de radio R, de tal forma que el plano de la base del cono coincida con el de la semiesfera.

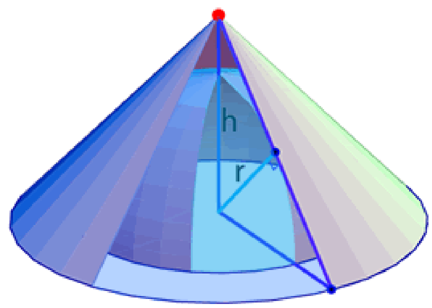
Respuesta esperada:

Solución:

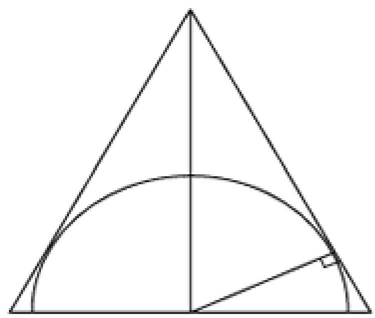
Hay que minimizar el volumen del cono circunscrito.

Si el radio de la base del cono es x y su altura es h, su volumen está dado por: $V = \frac{\pi}{3}x^2 h$

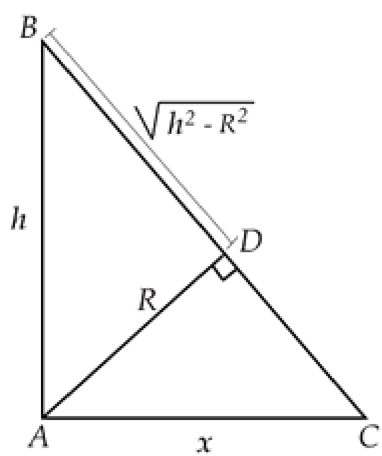
Gráficamente se tiene:



Haciendo un corte transversal se tiene:



Podemos utilizar semejanza de triángulo para obtener una ecuación auxiliar:



$$\triangle ABC \sim \triangle ABD$$

$$\frac{R}{x} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{h}$$

de donde $x = \dfrac{hR}{\sqrt{h^2 - R^2}}$

Sustituyendo en la ecuación del volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3} x^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{hR^2}{\sqrt{h^2 - R^2}} \cdot h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - R^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 3R^2)}{(h^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h - \sqrt{3}R)(h + \sqrt{3}R)}{(h^2 - R^2)^2}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada, analicemos cuál valor crítico corresponde a un valor mínimo:

	$-\infty$, $-\sqrt{3}R$	$-\sqrt{3}R$, 0	0 , $\sqrt{3}R$	$\sqrt{3}R$, $+\infty$
h^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$h - \sqrt{3}R$	$-$	$-$	$-$	$+$
$h + \sqrt{3}R$	$-$	$+$	$+$	$+$
$V'(h)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$V(h)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Como $V(h)$ decrece para $x \in]0, \sqrt{3}R[$ y crece para $x \in]\sqrt{3}R, +\infty[$ entonces $h = \sqrt{3}R$ corresponde a un valor mínimo que era lo que nos interesaba. Luego, las dimensiones del cono circunscrito a la esfera son: radio de la base $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, altura $h = \sqrt{3}R$

Las actividades están planteadas con sus respuestas esperadas o expertas, frente a estas analizamos como los alumnos abordan estos problemas y como proceden frente a una dificultad, o como sortean los diferentes obstáculos que puedan surgir.

En síntesis nos interesa ver y analizar las estrategias que emplean y la pertinencia que pueden tener respectos a los conceptos presentados, en este caso el concepto de derivada aplicaciones a problemas de maximización.

Las respuestas de los alumnos son agregadas al final en el apartado que figura como anexo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Antes de escribir nuestra conclusión nos propusimos realizar, una síntesis de la evaluación y plasmarla en un cuadro con un análisis FODA.

Fortalezas: Contamos como fortalezas, el dominio y habilidad que presenta esta población estudiantil en la aplicación de algoritmos y manejo de los recursos informáticos , dado por la misma modalidad de la escuela.	*Oportunidades:* Como oportunidades destacamos la buena predisposición del equipo directivo para llevar a cabo este trabajo. El ánimo de los alumnos y la predisposición a trabajar con una metodología de estas características.
Debilidades: La abstracción del concepto, la formulación de modelos que representen la situación que se intenta modelizar. La falta de recursos económicos para una mayor disponibilidad de material.	*Amenazas:* No encontramos tales, aunque si podríamos anunciar que el Currículum de la provincia no contempla el abordaje del cálculo, ni siquiera como herramienta funcional.

Comentarios finales acerca del trabajo realizado:

Finalizado el trabajo se realizó la puesta en común, en donde el foco de atención fue la comparación de los resultados obtenidos por los distintos grupos.

Las apreciaciones obtenidas fueron variadas, observamos como el cálculo genera una serie de sentimientos encontrados, pues para algunos alumnos resultó un tanto dificultoso, mientras que para otros la visión fue totalmente distinta ,sobre todo a la hora de evaluar la utilidad de esta herramienta.

Es decir se introdujo en la discusión una postura realista de la matemática, una visión que a nuestro entender abre el juego para plantear la enseñanza de conceptos matemáticos desde una aplicación concreta, dentro de lo posible, o como complemento para la aplicación concreta, en el caso de conceptos más abstractos.

Así mismo los propios estudiantes establecieron vínculos entre conceptos adquiridos y el cálculo, rescatando la optimización en el, valga la redundancia, cálculo, la posibilidad de reducir los procesos para arribar a conclusiones de manera más óptima.

Esta fase del trabajo constituye la hipótesis base para abordar conceptos posteriores. El debate, las diferentes alternativas de resolución, y fundamentalmente la PUESTA EN COMÚN y la conclusión acerca de la significatividad de los resultados son las estrategias que consideramos esenciales fortalecer y practicar para lograr un exitoso, o al menos fructífero y sólido proceso de enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía de consulta utilizada para la elaboración de este trabajo:

-Botta, Mirta; Warley, Jorge.-TESIS, TESINAS, MONOGRAFIAS E INFORMES-Ed. Biblos Metodologías- Bs. As, Arg. Julio de 2007. ISBN 978-950-786-610-4

-Mántica , Ana María; Nitti Liliana, Scaglia, Sara.(compiladoras)- LA MATEMÁTICA, APORTES PARA SU ENSEÑANZA- Ed. Universidad Nacional del Litoral-Santa Fe , Arg. 2006. ISBN 978-508-631-2.

-Chemello, Graciela y otros. PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA (CARPETA DE TRABAJO) 2º Edición- Ed. Universidad Nacional de Quilmes- Bs.As. Arg. Marzo de 2008. ISBN 978-987-558-133-3

- Rottemberg, Rosa; Anijovich, Rebecca. PROBLEMAS ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y DISEÑO DE UNIDADES DE APRENDIZAJE (CARPETA DE TRABAJO) - Ed. Universidad Nacional de Quilmes- Bs.As.,Arg. Marzo de 2007. ISBN 978-987-558-094-7

-Apuntes de cátedra, Análisis Matemático, Universidad Nacional del Sur-2004