TUTORIALES: UNA ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA PARA COMPLEMENTAR LA TAREA DEL AULA EN EL APRENDIZAJE DE ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRIA ANALITICA

Augusto Ariel Estrada Velasquez

Facultad de Ciencias Exactas – Universidad Nacional de Salta
ariel@unsa.edu.ar o chapacoar@yahoo.com.ar Tel: 0387-4390451

Categoría del trabajo: Relato de experiencia áulica
Nivel Educativo: Universitario
Palabras claves: tutoriales-estrategias-aprendizaje-Algebra Lineal

Resumen

Este trabajo relata una experiencia desarrollada con un grupo de estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica del primer año de diversas carreras de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Salta.

En 2010 se cambia el Plan de Estudios Licenciatura en Análisis de Sistemas disminuyendo la carga horaria con respecto al resto de las carreras. Como docente, a cargo de las clases prácticas, buscando estrategias de enseñanza que suplan esta disminución de tiempo en la presencialidad y hagan uso de las nuevas tecnologías. Me propuse complementar el trabajo del aula mediante elaboración de tutoriales para cada uno de los trabajos prácticos poniéndolos a disposición de los estudiantes usando el correo electrónico.

Para responder a los retos que demanda la sociedad de la información y la comunicación, se postula como uno de los pilares el de Aprender a aprender.

En concordancia con ello, los tutoriales, se conciben como un instrumento además de enseñar procedimientos, enseñen a aprender. De allí que en su desarrollo se busca mostrar al aprendiz, que debe realizar una tarea, el qué se debe hacer, el cómo se debe hacer y el por qué se hace de uno u otro modo.

Fundamentación

Esta experiencia se llevó a cabo en la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica asignatura del primer año de diversas carreras de la Facultad de Ciencias Exactas de la

Universidad Nacional de Salta. Como la mayoría de las asignaturas del primer año, esta inmersa en la problemática de la numerosidad, gran deserción y bajo rendimiento lo que implica un desafío continuo para los docentes que participamos en el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en las mismas.

En el año 2010 se cambia el Plan de Estudios Licenciatura en Análisis de Sistemas, una de las carreras para las que se dicta la asignatura, disminuyendo la carga horaria respecto al resto de las carreras. Como docente, a cargo de las clases prácticas de una de estas comisiones y con el propósito de buscar estrategias de enseñanza que, además de suplir esta disminución de tiempo en la presencialidad hagan uso de las nuevas tecnologías, me propuse complementar el trabajo del aula mediante la elaboración de tutoriales para cada uno de los trabajos prácticos, y ponerlos a disposición de los estudiantes utilizando el correo electrónico.

Naturalmente, para ello debía tener presente el nuevo contexto en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje a raíz de los retos a los que se enfrenta la educación por las demandas de la sociedad de la información y la comunicación. "Aprender a aprender y Aprender a vivir juntos se postulan como los dos pilares que expresan los nuevos desafíos que debe enfrentar la educación"..Se hace necesario replantear la tarea educativa como mero instrumento de transmisión de información y priorizar el proceso de aprendizaje. Toma relevancia entonces el postulado de aprender a aprender ya que el mismo hace referencia al aspecto cognitivo, por lo que es en este postulado principalmente donde se debe poner énfasis al momento de asumir los nuevos desafíos educativos.

En tal sentido considero necesario asumir el nuevo rol que como docente se me asigna para favorecer un mejor desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. Asimismo desde mi rol docente, concientizar a los estudiantes de la necesidad de asumir el rol que les cabe como aprendices en la nueva concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje. Concientizarlos de que la mejor manera de prepararse para enfrentar este mundo globalizado, no es sólo mediante la acreditación de conocimientos para la obtención de un título, sino además, aprender a reflexionar críticamente sobre esos conocimientos, y ser capaces de utilizarlos para solucionar problemas específicos de la sociedad o para generar nuevos conocimientos.

Desde mi punto de vista, la mayoría de nuestros alumnos, están tan preocupados por obtener su título, que se olvidan o ponen en segundo plano, lograr un aprendizaje significativo.

En general buscan las estrategias que les permitan sortear los exámenes, para avanzar en su carrera, aunque su aprendizaje sea superficial.

Teniendo en cuenta entre otros, estos aspectos, se pensó en una estrategia que buscara de alguna forma promover en los estudiantes un cambio de actitud en lo relacionado a su rol de aprendiz y que a nuestro juicio podría contribuir a mejorar estos aspectos del aprendizaje. La propuesta consistió en:

1. Proponer actividades fuera del horario de clase, utilizando un medio tecnológico, el correo electrónico
2. Elaborar tutoriales en los que se desarrolle ejemplos similares a los que se proponen en el trabajo práctico poniendo énfasis en los siguientes aspectos:
    a) Determinación del qué hay que hacer (comprensión de la consigna)
    b) Explicitación de cómo lo voy a hacer (determinación del procedimiento o método de resolución)
    c) Justificación de por qué lo voy a hacer de este u otro modo (relación del problema con los conceptos teóricos involucrados)
    d) Proponer actividades para que fueran resueltas por el estudiante y enviadas al docente (autoevaluación por parte del estudiante y evaluación del proceso por parte del docente)

3.- Solicitarles a los estudiantes la lectura del tutorial y una devolución con sus comentarios acerca del mismo y su apreciación de la utilidad o no como ayuda para resolver las actividades del trabajo práctico

Objetivos:

1. Complementar el trabajo desarrollado en el aula
2. Promover en los estudiantes el compromiso con su aprendizaje
3. Promover en los estudiantes el uso de estrategias de aprendizaje para la comprensión y para un aprendizaje significativo
4. Mejorar el aprendizaje de los estudiantes en todos sus aspectos: conceptual, procedimental y actitudinal

Metodología

Se utilizó el correo electrónico como medio tecnológico para enviar a los estudiantes un archivo PDF de un tutorial de cada uno de los trabajos prácticos.

Se les solicitaba a los estudiantes, que hicieran llegar su opinión, comentarios y dudas del , tutorial, con el fin de tener una retroalimentación que posibilite su mejora. Asimismo para tener información relacionada con el aspecto actitudinal de los estudiantes en cuanto a su compromiso con su aprendizaje.

En las clases presenciales se combinó el trabajo individual con el trabajo en grupo. Para el trabajo en grupo, se formaban grupos de estudiantes a los que se les asignaba un ejercicio del trabajo práctico, se consensuaba el tiempo disponible para pensar su resolución, luego de lo cual, cada grupo explicaba al resto de la clase, propiciando de esta manera el desarrollo de sus habilidades de organización, exposición, argumentación, ejercitar su pensamiento lógico deductivo y la interacción entre los estudiantes y con el docente.

Desarrollo

Como primer paso, se envió una carta de presentación (tutorial 0) mediante la cual se puso en conocimiento de los estudiantes, las acciones que se pensaba llevar a cabo. En ella se hacía algunas consideraciones generales acerca de cómo encarar una tarea con independencia de su naturaleza y algunas reflexiones tendientes a concientizar a los estudiantes acerca de aprender comprendiendo y con significado, del compromiso personal que implica el proceso de aprendizaje en el que van a estar involucrados y de la importancia que el trabajo colaborativo en grupo tiene para su formación integral.

Se elaboró y puso a disposición de los estudiantes tutoriales de cada uno de los trabajos prácticos conteniendo los siguientes items:

1. Una introducción para explicar en forma sintética lo que se realizará en el trabajo práctico, explicitando los conceptos involucrados en el mismo y algunas recomendaciones acerca de la forma en que deberían encarar la resolución de las actividades propuestas
2. Explicación de las consignas de cada uno de los ejercicios propuestos en el trabajo práctico a los efectos de poner de manifiesto el qué de la tarea solicitada para ayudar a su comprensión.
3. A través de preguntas, se buscaba guiar a los estudiantes para que puedan, en su afán de dar respuestas a las mismas, establecer la necesidad de los conocimientos conceptuales que permiten, determinar el cómo llevar a cabo la tarea y el porqué realizarla de ese u otro modo, justificando cada uno de los pasos del procedimiento utilizado para su desarrollo. Se trató de inducir a los estudiantes, a no solo memorizar o aprender conceptos y procedimientos, sino también mediante la justificación de lo que se realiza, comprender lo que se hace.
4. Desarrollo de ejemplos ilustrativos en los que se trataba de explicitar lo expuesto en los puntos anteriores. Es decir poner de manifiesto el ¿Qué? debo hacer, el ¿Cómo? lo debo hacer y el ¿Por qué? lo hago de ese modo. Se trató de buscar que el estudiante establezca la relación entre lo que realiza y los conceptos teóricos involucrados, de que perciba la necesidad de conocerlos pero sobretodo comprenderlos y poder utilizarlos poniendo en juego su razonamiento lógico deductivo para la justificación de lo que hace posibilitando de ese modo una significación de lo que aprende.

5. Al final del tutorial se propone un cuestionario con una serie de afirmaciones con la consigna de decidir la verdad o falsedad de las mismas, justificando la respuesta. Se les solicitaba que las respondieran y enviasen sus respuestas. Se pretendía con ellas, en primer lugar que los estudiantes puedan autoevaluar su aprendizaje, y en segundo lugar establecer de alguna manera, el aspecto actitudinal de los estudiantes en cuanto al grado de compromiso personal con su aprendizaje.

A modo de ejemplo y para mostrar lo que se ha realizado, se muestra un ejercicio de la guía del Trabajo Práctico Nº 3 con explicación de la consigna y ejemplos desarrollados en el Tutorial 3 propuesto para dicho trabajo práctico.

Ejercicio 3:

El **qué** de la tarea consiste en determinar si un conjunto dado constituye un subespacio vectorial de un cierto espacio vectorial. Observa que la consigna no menciona nada acerca de las operaciones ni del cuerpo de escalares a considerar para la estructura de espacio vectorial. Ello puede considerarse como una omisión de la consigna, pero recuerda también que en la asignatura, se considera que a menos que se diga lo contrario, cuando no se definen específicamente las operaciones ni el cuerpo de escalares, se considera las operaciones usuales en el conjunto dado y como cuerpo el conjunto de los números reales.

Para precisar ¿cómo? lo hacemos, debemos responder la pregunta ¿Cómo se determina que un conjunto dado es un subespacio vectorial de un espacio vectorial dado? Para responderla, solo hay que recordar la definición de subespacio vectorial, ella exige que el conjunto sea a su vez un espacio vectorial, con lo cual estaríamos en principio resolviendo el mismo problema que ya resolvimos en los ejercicios 1 y 2 . Sin embargo debido a que el conjunto dado es un subconjunto del espacio vectorial, hereda de él el cumplimiento de la mayoría de los axiomas a ecepción del que corresponde a la existencia del elemento neutro de la suma.

Asimismo, como no se puede asegurar que las operaciones de suma y producto por un escalar sean cerradas en el conjunto (esto no se hereda) se debe verificar que lo sean. Además se hace necesario solicitar que sea un conjunto no vacío. De alli que para decidir si un conjunto es un subespacio de un espacio vectorial, sólo debemos verificar que se cumplan las tres propiedades, a saber:

Un conjunto S es un subespacio de un espacio vectorial $(V,+,K,\cdot)$ si y solo sí:

1) $S\neq\emptyset$ 2) $\forall U,V \in S \Rightarrow (U+V) \in S$ 3) $\forall U\in S, \forall\alpha \in K \Rightarrow \alpha\cdot U \in S$

En las clases teóricas es posible que se haya demostrado el siguiente Teorema: Si S es un subespacio de un espacio vectorial V,entonces: $S\neq\emptyset \Leftrightarrow: \Theta\in S$ (Θ neutro de la suma en V)

En virtud de ello la condición 1) se puede sustituir por su equivalente: $\Theta \varepsilon S$, condición que es de mayor utilidad práctica, por lo que en lo sucesivo es la que vamos a tomar como 1).

En consecuencia cada vez que tengamos que decidir si un conjunto dado es o no un subespacio de un espacio vectorial, debemos ver si se cumplen las tres condiciones (para que lo sea) o ver si alguna de ellas no se cumple (para el caso que no lo sea). El proceso es similar al que has realizado para espacio vectorial con la diferencia que la cantidad de axiomas a verificar es mucho menor. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Decidir si el conjunto dado es un subespacio vectorial de R^2 sobre el cuerpo de los reales y con las operaciones de suma y producto por un escalar usuales. $S=\{(x,y) \varepsilon R^2/x+y=1\}$. Veamos si se verifican las tres condiciones:

1) ¿ $\Theta=(0,0)\ \varepsilon S$?

¿Cómo respondemos a esta pregunta? Para responderla debemos probar que el elemento neutro de la suma usual en R^2 es un elemento de S y para ello debemos mostrar que el elemento neutro cumple la definición de S.

Según la definición de S, un elemento de R^2 será un elemento de S si cumple la condición $x+y=1$. y recíprocamente cualquier elemento de R^2 que cumple la condición $x+y=1$, será un elemento de S.

Es muy importante comprender esta situación al momento de verificar las condiciones, sobre todo las dos últimas, las que constituyen implicaciones cuyas hipótesis verdaderas exigen tomar elementos (genéricos) del conjunto S con los que se debe probar que la suma o el producto por un escalar también están en S.

En el caso del (0,0) si reemplazamos en la condición $x+y=1$ tenemos:

$0+0=1 \Rightarrow 0=1$ igualdad falsa. En consecuencia $(0,0)\notin S$ y por lo tanto al no cumplirse la 1) podemos decir que S no es un subespacio de R^2 sin necesidad de ver que ocurre con las condiciones 2) y 3).

Ejemplo 2: Enunciado similar al del ejemplo 1 pero con $S=\{(x,y)\varepsilon R^2/x-y\leq 0\}$

Veamos si se cumplen las propiedades:

1) ¿ $\Theta=(0,0)\ \varepsilon S$? La respuesta es afirmativa, ya que al reemplazar en la condición $x+y\leq 0$ tenemos: $0+0\leq 0 \Rightarrow 0\leq 0$ proposición verdadera ya que se cumple la igualdad.

2) $\forall U,V \varepsilon S \Rightarrow (U+V)\varepsilon S$

Como la propiedad a probar es una implicación, deberemos utilizar alguno de los procedimientos de demostración (directo o indirecto). En este caso conviene hacerlo por el directo y en él a partir de la verdad de la hipótesis se debe probar la verdad de la tesis. Es decir tomando dos elementos genéricos del conjunto S, debemos probar que su suma es también un elemento de S.

Demostración:

Sean U,VεS, $U=(x_1, y_1)$,$V=(x_2, y_2)$ hipótesis

$\Rightarrow x_1-y_1\leq 0$ (1) y $x_2-y_2\leq 0$(2)   definición de S

$\Rightarrow x_1-y_1+ x_2-y_2 \leq 0 +0$ sumando miembro a miembro (1) y (2)

$\Rightarrow (x_1+ x_2)-(y_1+y_2) \leq 0$ neutro,conmut.,asociativa y distrib. en R

$\Rightarrow [(x_1+ x_2),(y_1+y_2)]$ εS   definición de S

$\Rightarrow [(x_1, y_1)+ =(x_2, y_2)]$ εS   definición de suma en R^2

$\Rightarrow$ (U+V) εS   hipótesis

3) $\forall$UεS, $\forall\alpha$εK$\Rightarrow\alpha\cdot$UεS

Sean UεS, $U==(x_1, y_1)$, αεR   hipótesis

$\Rightarrow$ $x_1-y_1\leq 0$ (1)   definición de S

$\Rightarrow$ Si$\alpha < 0 \Rightarrow \alpha[(x_1, y_1)\geq \alpha 0$ consistencia en R

$\Rightarrow \alpha\, x_1-\alpha\, y_1\geq 0$ distributiva en R y propiedad $\alpha 0=0$ $\forall\alpha$εR

Si observamos esta última expresión, podemos ver que el primer miembro de la desigualdad es el mismo que la condición de la definición de S, pero la desigualdad es contraria. Esto nos está diciendo que esta propiedad no se verifica siempre y nos da la pista para encontrar el contraejemplo.

$\exists$ U=(1,3) εS ya que 1-3=-2<0 , $\exists$ α=-1 tal que $\alpha\cdot U= -1\cdot(1,3) = (-1,-3)\notin$S porque no cumple con la condición de S. En efecto. x-y = -1-(-3) = -1+3 = 2 > 0.

En consecuencia no se cumple la 3) por lo que S no es un subespacio de R^2

¡Caramba que desilución!, todo andaba bien y resulta que la última propiedad viene a arruinarlo, **tanto esfuerzo en verificar las otras dos para encontrar que la tres falla**. Aquí tenemos un ejemplo de lo que sucede cuando trabajamos en forma mecánica y no pensamos ni nos preguntamos ¿por qúe voy a hacerlo así? cada ves que realizamos algo.

Si antes de empezar a verificar las propiedades hubiésemos analizado un poco lo que debíamos hacer, en función del conjunto en particular y relacionando con los conceptos que ya aprendimos, lo mas probable es que nos hubiésemos dado cuenta de que el producto por un escalar podía fallar. En efecto, con solo recordar la propiedad de consistencia en R, (**Cuando multiplicamos una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido)**. Podríamos, sin mucho trabajo, dar el contraejemplo para mostrar que no se cumple la 3) y de esta forma, afirmar que el conjunto dado no es un subespacio, ahorrándonos el trabajo de verificar las otras dos propiedades.

Ejemplo 3: Enunciado similar a los anteriores con $S=\{(x,y)\in R^2/x^2-y = 0\}$

Recordando la experiencia anterior, antes que nada analicemos un poco la condición que deben cumplir los elementos de R^2 para pertenecer a S. La condición es una ecuación cuadrática que si la memoria no falla, representa una parábola. Despejando y en función de x tenemos: $y = x^2$. De ella deducimos que cualquiera sea x, el valor de y será siempre positivo.

En consecuencia si tomáramos un par con componentes ambas positivas que sea elemento de S y lo multiplicáramos por un real negativo, el par resultante tendrá ambas componentes negativas y listo la propiedad 3) fallará.

En efecto. $\exists U=(2,4)\in S$ ya que $4=2^2$, $\exists \alpha = -1$ tal que.$\alpha\cdot U = -1\cdot(2,4) = (-2,-4) \notin S$ ya que $-4\neq (-2)^2 = 4$

En consecuencia al no verificarse 3) podemos decir que S no es un subespacio de R^2.

Asimismo si observamos la segunda condición, debemos probar que el vector suma de dos elementos del conjunto es un elemento del conjunto, con lo cual debería verificar la condición $y = x^2$. Esto en general no se cumple, ¿puedes decirme por qué?.

Miremos un poco lo que hemos obtenido en cada uno de los ejemplos que hemos resuelto. En el primer caso la condición del conjunto era una ecuación lineal no homogénea y fallaba la primera condición (el neutro no estaba en el conjunto). En el segundo ejemplo la condición del conjunto era una desigualdad y fallaba la tercera condición (el producto por un escalar no siempre estaba en el conjunto) y por último en el tercer ejemplo la condición del conjunto era una ecuación cuadrática (no lineal), fallaba la segunda y tercera condición (la suma y el producto por un escalar no siempre estaban en el conjunto). Pareciera ser que para que un conjunto sea un subespacio su condición debe ser una ecuación lineal homogénea. ¿Será siempre así?¿por qué?.Intenta responder justificando tu respuesta.

Análisis y conclusiones:

El análisis y las conclusiones lo hacemos teniendo en cuenta el grado de cumplimiento de los objetivos propuestos. Creemos que el objetivo de complementar el trabajo del aula ha sido logrado ya que los estudiantes disponían de los tutoriales para poder utilizarlos en el momento que lo desearan. En cuanto a los otros objetivos es muy difícil hacer una evaluación del grado de cumplimiento que pueden haber tenido. Cualquier apreciación puede resultar muy subjetiva ya que al ser una primera experiencia las apreciaciones que puedo realizar están basadas sobre todo en las respuestas que los estudiantes me hicieron llegar. En base a ellas considero que la propuesta ha aportado para fomentar en aquellos estudiantes que aprovecharon los tutoriales un cambio de actitud en cuanto al compromiso con su aprendizaje y a la necesidad de aprender comprendiendo y con significado. Transcribo a continuación textualmente a modo de ejemplo, algunas de las apreciaciones de los estudiantes.

- Profesor ya he completado mis practicos hasta el Tp4, y realmente me han servido mucho para estudiar para el parcial, desgraciadamente me falto un poco mas de dedicación. Qeuria pedirle si me puede enviar el tutorial de los siguientes Tps ya me son de gran ayuda cuando estudio en casa. Saludos profe. Aguante su clase de teoria !! =D (Javier Corregidor)
    - Hola Prof Estrada con respecto al texto que nos mando me parece que esta muy bueno por muchos motivos yo estoy recursando la materia y me parece que lo que esta haciendo con el tema de los tuturiales para los trabajos practicos creo que nos va a ser de mucha ayuda en especial cuando tengamos dudas mas adelante con los practicos que siguen y nos preguntemos "¿Qué es lo que debemos hacer?" y tengamos estos tutoriales para esas dudas que tengamos (me hubieran servido mucho el año pasado). Por otra parte creo que estan muy acertados los consejos que nos da sobre COMO estudiar a no rendirse a estudiar con ganas y colavorativamente con los compañeros, creo que si todos hacemos lo que dice no habria problema en aprobar la materia. Bueno profe le mando saludos y voy tratar de cumplir con los consejos. Gracias
- Profe, recibi correctamente los tutoriales 0,1 y 2 y me parecen de gran utilidad. Creo que nos ayudan a todos a poder terminar los practicos y entender los temas. Con respecto a lo planteado en el tutorial 0 estoy totalmente de acuerdo, sobre todo en el trabajo en grupo. En estas clases hemos podido comprobar como las dudas planteadas en el pizarron por diferentes compañeros nos ayudan a todos!. Le agradezco este trabajo, y espero los proximos tutoriales. atte. (Jose Db Ashur)

Como conclusión final creo que se puede seguir intentando ponerla en práctica en el futuro y profundizando el uso de la tecnología mediante una página web en la que se puedan subir los tutoriales, y extenderla a todos los alumnos que cursan la asignatura