

FUNCIONES SEMIÓTICAS ASOCIADAS A LOS ERRORES MÁS FRECUENTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS BAYESIANOS

Stella Maris Figueroa, Sandra Baccelli, Gloria Prieto y Emilce Moler

Universidad Nacional de Mar del Plata. Facultad de Ingeniería

Juan B. Justo N° 4302 C.P. 7600

stellafigueroa@gmail.com

Categoría del Trabajo: Investigación.

Nivel Educativo: Superior.

Palabras clave: errores - probabilidad condicional - problemas bayesianos - enfoque ontosemiótico

Resumen

La investigación que encuadra este trabajo tuvo por objetivo la detección de las dificultades y errores en la resolución de problemas bayesianos, bajo el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Para ello, se analizaron las producciones escritas de 50 estudiantes que cursan la asignatura Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Sobre la base de los errores cometidos al razonar sobre la probabilidad condicional, se diseñó y aplicó una nueva estrategia didáctica durante el proceso de instrucción, que pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes. De esta forma, se favorece la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, en particular, del coloquial al simbólico. Los alumnos que evidenciaron el uso de estas transformaciones, mostraron menores dificultades en sus resoluciones al establecer correctamente las funciones semióticas entre los datos de estos problemas con los sucesos involucrados y sus probabilidades asociadas.

Introducción

Las dificultades que se generan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de la *probabilidad condicional* han sido abordadas por diversos autores. Entre los más relevantes se destacan Pollatesk y cols. (1987), que analizan las causas que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional. Estas causas incluyen la presentación de los enunciados y el contexto de los problemas, basados o no en el conocimiento de los alumnos sobre situaciones reales.

En un estudio exploratorio sobre las dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes, Díaz y De la Fuente (2007), compararon el desempeño de estudiantes

de Psicología en esta tarea, destacando los errores que cometen. Ordenados de mayor a menor frecuencia, detectaron: no identificación o identificación incorrecta de los datos, confusión entre probabilidad simple y condicional, error en la partición del espacio muestral, construcción incorrecta de diagramas de árbol, error en la aplicación de la Fórmula de Bayes, fallas en el razonamiento proporcional y en las operaciones con fracciones, confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta, falacia de la tasa base (tendencia a ignorar la información que describe a la mayor parte de las personas), confusión de un evento con su complemento, confusión de una probabilidad condicional con su inversa; esto es, confundir $P(A/B)$ con $P(B/A)$ y error en el cálculo de la probabilidad total. Luego de estudiar los problemas que involucran el Teorema de Bayes, estos autores concluyen que son de alta complejidad para los estudiantes y que “la estadística debiera enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento” (Díaz y De La Fuente, 2007, p. 281). Actualmente, el trabajo de Batanero, Contreras y Díaz (2012) analiza algunas dificultades que surgen al razonar sobre la probabilidad condicional. Su comprensión preocupa a estos autores que muestran estos errores no sólo en estudiantes de Psicología, sino también en futuros profesores de matemática.

Al considerar estos errores en esta investigación, se pretende lograr una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión, y sabiendo que las representaciones condicionan las prácticas matemáticas que conforman el significado de los objetos involucrados, es fundamental que el alumno pueda interpretar y articular dichas representaciones (Font, Godino y D’Amore, 2007). De ahí que uno de los objetivos que se persigue al investigar cómo enseñar probabilidad condicional, sea explorar los significados que los alumnos tienen construidos en relación al uso de sus representaciones. El trabajo de Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) presenta un análisis sobre la conversión entre representaciones que, si bien son efectuadas para números complejos, concluye que es necesario abordar sistemáticamente esta tarea de conversión para favorecer la coordinación entre diferentes registros y la conceptualización del objeto matemático en estudio, que, para este caso, es la probabilidad condicional.

En esta estrategia didáctica se propone una secuencia de procedimientos que pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes.

Para ello, se procura favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, a través de la construcción de significados entre los datos del problema y la identificación de los sucesos involucrados.

Marco Teórico

El marco teórico y metodológico utilizado es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font (2009).

En este marco, una *práctica matemática* se define como cualquier acción, expresión o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009).

A partir del concepto de práctica matemática, surge la noción de *significado*, definido como “el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un *significado personal*, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un *significado institucional*. En este contexto, el *aprendizaje* es entendido como la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, a través de su participación en las comunidades de prácticas (Godino et al, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Dado que puede no existir concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan discrepancias que dan lugar a lo que bajo este enfoque se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Se definen seis entidades primarias u objetos matemáticos que se vinculan entre sí: las *situaciones-problemas* son el origen y motivación de la actividad matemática, el *lenguaje* actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los *argumentos* justifican los *procedimientos* y las *proposiciones* que, conjuntamente con las *definiciones*, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones*, definidas por Godino, Batanero y Font (2009) como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos” (p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan *configuraciones epistémicas*. Paralelamente, las *configuraciones cognitivas*, son aquellas que describen los sistemas de prácticas personales (Godino, Batanero y Font, 2009). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal (Godino y Batanero, 1994).

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de *funciones semióticas*.

Una función semiótica es el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que les causan equivocaciones no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).

Metodología

Se llevó a cabo una investigación de naturaleza descriptiva y explicativa, en el sentido que se recolectó y analizó información que pudiera explicar las dificultades y errores cometidos en la resolución de problemas referidos al Teorema de Bayes. Dicha información se extrajo de las resoluciones escritas realizadas por 50 estudiantes de la asignatura Estadística, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

Las actividades consistieron en aplicar una *metodología de resolución* de problemas bayesianos, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla1. Metodología de resolución de problemas bayesianos.

1) La detección, en el problema, del suceso condicionante o principal "A".
2) La identificación de los sucesos simples cuyas probabilidades suman uno.
3) La identificación de la probabilidad condicional pedida.
4) La identificación de las otras probabilidades condicionales en el problema.
5) La representación gráfica del suceso condicionante A.
6) La representación simbólica del suceso A como unión de sucesos mutuamente excluyentes
7) El cálculo de la probabilidad total del suceso principal.
8) La aplicación de la fórmula del teorema de Bayes al reemplazar la probabilidad pedida con el cálculo previo de la probabilidad total.

Obtención de la información

La obtención de la información respecto de las actuaciones de los alumnos para la construcción de los significados establecidos por las funciones semióticas, se aplicó en dos momentos: el primero, antes del comienzo de la enseñanza de la metodología de resolución de

estos problemas, con una evaluación diagnóstica, proponiendo a los alumnos resolver un problema bayesiano.

Luego, durante la puesta en común, se analizó lo interpretado por los alumnos en el problema y se procuró resolver los conflictos de significados producidos por las dificultades y por los errores que iban surgiendo en cada uno de los pasos al aplicar esta metodología de resolución.

En esta primera etapa del estudio, se realizó una configuración epistémica del problema bayesiano propuesto a los alumnos, para poner de manifiesto la metodología de resolución y el modo en que se articulan los objetos primarios involucrados en la actividad matemática propuesta. Posteriormente, se construyeron y analizaron las configuraciones cognitivas de la evaluación diagnóstica, utilizando como base, la configuración epistémica realizada.

Las producciones de los alumnos se registraron en un protocolo donde se compararon ambos tipos de configuraciones. En él se identificaron las dificultades y errores que los estudiantes cometieron en sus resoluciones. Asimismo, se registró el establecimiento de las funciones semióticas identificadas en la configuración epistémica, expresadas en términos de las actuaciones de los alumnos, con el siguiente criterio: 1 (función semiótica establecida correctamente), 0.5 (establecida en forma parcialmente correcta), 0 (incorrecta y/o no respondió).

La obtención de la información, en el segundo momento, se efectuó en base a las resoluciones de los alumnos en la primera evaluación parcial de la asignatura, donde se propuso la resolución de otro problema bayesiano. La asignación de puntaje en las dos instancias, permitió determinar cuáles fueron las dificultades más notorias y la comprensión alcanzada en torno a los objetos matemáticos involucrados que presentaron los alumnos, antes de la implementación de esta propuesta y en la instancia evaluativa posterior.

Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas bayesianos.

El conjunto de funciones semióticas del proceso de instrucción fue seleccionado sobre la base del análisis de los errores más frecuentes de los alumnos al resolver ese tipo de problemas.

En la Tabla 2 se muestra la relación de las funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas bayesianos.

Tabla 2. Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas bayesianos.

	Confusión de $P(B_i/A)$ con $P(A/B_i)$	Confusión de $P(A/B_i)$ Con $P(B_i)$	Confusión de $P(A/B_i)$ con $P(A \cap B_i)$	Errores en la partición de S	Error en la aplicación de la Fórmula de la P.Total	Error en la aplicación de la fórmula del T. de Bayes
F₁ Asigna la correspondencia entre los datos del problema con la identificación del suceso condicionante A	X					
F₂ Establece la identificación de los sucesos que forman una partición del espacio muestral S, los sucesos B_i		X		X		
F₃ Establece la identificación entre los datos del problema y la probabilidad condicional pedida.	X		X			
F₄ Asigna la correspondencia entre las probabilidades condicionales dadas en el problema con las probabilidades condicionales en forma simbólica.	X		X			
F₅ Asigna un gráfico con los sucesos que forman una partición del espacio muestral y el suceso A				X	X	X
F₆ Asigna al suceso A la unión de sucesos mutuamente excluyentes.					X	X
F₇ Establece el valor numérico resultante del cálculo de la probabilidad Total					X	
F₈ Establece el valor numérico resultante del cálculo de la fórmula del Teorema de Bayes.					X	X

Resultados Obtenidos

En la Tabla 3, se detalla el registro de las funciones semióticas de las configuraciones cognitivas de los alumnos establecidas al comienzo del proceso de instrucción y después de dicho proceso.

Tabla 3. Protocolo de registro de las funciones semióticas de las configuraciones cognitivas de los alumnos en el momento inicial y final de la estrategia didáctica implementada.

Actuación de los alumnos Funciones semióticas	Momento del proceso de instrucción	Correctas		Incorrectas/ No Respondió
		Totalmente	parcialmente	
F1	comienzo	23	2	25
	después	40	6	4
F2	comienzo	40	5	5
	después	48	0	2

F3	comienzo	20	3	27
	después	47	0	3
F4	Comienzo	9	6	35
	después	35	9	6
F5	comienzo	14	3	33
	después	27	0	23
F6	comienzo	0	0	50
	después	10	2	38
F7	comienzo	8	9	33
	después	36	10	4
F8	comienzo	14	6	30
	después	36	10	4

Si se observa en cada una de las actuaciones de los alumnos, sus respuestas al comienzo de la estrategia didáctica implementada y después de la misma, se destacan los siguientes resultados:

- F₁, que se refiere a una correspondencia semiótica lingüística entre el dato que da el problema con el suceso que ocurrió, es establecida correctamente por el 46% de los alumnos al comienzo del proceso de instrucción. Luego ese porcentaje fue ampliado al 80% de los mismos.
- F₃, que establece la identificación entre los datos del problema y la probabilidad condicional pedida, luego de la estrategia didáctica, fue establecida correctamente por casi la totalidad de los alumnos.
- Con F₄, la identificación correcta de los sucesos condicionantes y condicionados permitió aumentar el porcentaje del 18% al 70%.
- F₅, que apunta a una correspondencia semiótica lingüística entre todos los sucesos intervinientes y su representación gráfica, no fue considerada al comienzo de la instrucción por ningún alumno. Al finalizar el proceso, la aplicó correctamente el 20 % de los estudiantes.
- En cuanto a F₆, que asigna al suceso que ocurrió la unión de sucesos mutuamente excluyentes, ningún estudiante la establece al comienzo de la instrucción, y al finalizar el proceso, el 20% de los estudiantes la aplican correctamente.
- Al comienzo del proceso de instrucción, el 66 % de los estudiantes no establecieron correctamente la función semiótica F₇, es decir, no aplicaron correctamente la fórmula de la probabilidad total y al finalizar el proceso, sólo un 8 % no lo hizo. Porcentajes muy similares se presentaron con la función semiótica F₈.
- Hubo un mayor número de alumnos que establecieron correctamente más funciones semióticas en la segunda instancia de evaluación, aumentando la frecuencia de los puntajes más altos, (puntajes entendidos como el número de funciones semióticas

establecidas en forma correcta y parcialmente correcta), como se muestra en la Figura 1.

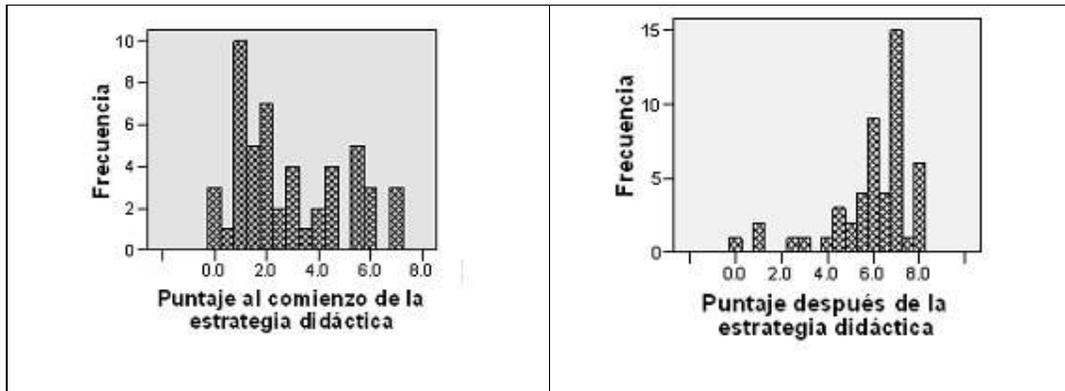


Figura 1. Número de funciones semióticas correcta y parcialmente establecidas obtenido por los alumnos al inicio y al final del proceso de instrucción.

Conclusiones

En este trabajo se ha efectuado un análisis ontosemiótico sobre las producciones escritas de estudiantes de Ingeniería después de implementar un proceso de instrucción para la resolución de problemas bayesianos. Dicho proceso fue diseñado sobre la base de los errores más frecuentes cometidos por los alumnos sobre el significado de la probabilidad condicional, detectados en numerosos trabajos de investigación sobre el tema. El establecimiento correcto por parte de los alumnos, de las funciones semióticas detalladas en esta investigación, reduce la frecuencia con la que se presentan los errores detectados en la resolución de estos problemas.

Se concluye que el establecimiento correcto de las primeras cuatro funciones semióticas, es un procedimiento que conduce necesariamente a la resolución de este tipo de problemas.

La asignación correcta de las funciones semióticas F_5 y F_6 que asignan significado a las fórmulas de la probabilidad total y del teorema de Bayes para su argumentación, no resultó necesaria para la resolución de los problemas. Pero si lo fueron para disminuir la frecuencia de los errores en la aplicación de las fórmulas de la probabilidad Total y del Teorema de Bayes.

Con respecto a la cantidad total de funciones semióticas establecidas correctamente por los alumnos, hubo un mayor número de respuestas correctas en la segunda instancia evaluada, lo que permite concluir que al finalizar el proceso de instrucción, disminuyó la frecuencia de cada uno de los errores mencionados, y se obtuvo un mayor número de alumnos que resolvieron correctamente el problema bayesiano evaluado.

El aprendizaje efectivamente constatado por la metodología de resolución utilizada, permite

concluir el valor que tiene una herramienta como es la configuración epistémica que plantea el EOS y las funciones semióticas establecidas, que han hecho posible la determinación de los principales factores que contribuyen a la resolución de problemas bayesianos, proporcionando no sólo una metodología de resolución sino también un aporte en la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes.

Referencias

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G., y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa* 12(47), 13-22.

Batanero, C., Contreras, M. y Díaz, C. (2012) Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Artículo*. Revista digital Matemática, Educación e Internet (<http://www.tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>). Vol. 12, No 2.

Batanero, C., Fernández, J. y Contreras García, J. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Revista Suma*. pp 11-18

Díaz, C y De La Fuente, I. (2007) Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*, 18(2), 75-94.

Díaz, C. y De la Fuente, I. (2007) Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional, *Revista Electrónica de Metodología Aplicada*. Volumen 12(1), p.p: 1-15.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 1-20). Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Pollatsek, A., Well, A., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding Conditional Probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*. 40, 255-269.