Usando geometría proyectiva para corregir una cámara. Parte II

No hay nada particularmente profundo en este problema o en su solución, pero espero que muestre el placer que se puede encontrar cuando usamos nuestra intuición matemática.

David Austin[1]

Coordenadas Baricéntricas.

Blinn también describe un segundo método para resolver este problema. Este nuevo método fue propuesto por Kirk Olynyk, uno de sus colegas en Microsoft Research, y usa coordenadas baricéntricas para simplificar las cuentas. Primero describiremos brevemente las coordenadas baricéntricas y luego presentaremos el método de Olynyk.

Si tenemos tres puntos no colineales en el plano, digamos $p_0, p_1,$ y p_2, podemos representar de manera única cualquier punto p en el plano de la siguiente forma

$$p = \pi_0 p_0 + \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2,$$

con la condición adicional de que $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$ Esto se puede ver fácilmente si uno de los puntos p_i es el origen. El caso más general se obtiene aplicando una traslación uniforme a los cuatro puntos.

[1] Impreso con autorización del autor.

Si pudiésemos aplicar esto a un punto en nuestro espacio de llegada, tendríamos que

$$\tau_0 t_0 + \tau_1 t_1 + \tau_2 t_1 = t$$

$$[\tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} = [u \quad v \quad 1],$$

y de manera similar para un punto en el espacio de salida:

$$\sigma_0 S_0 + \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = S.$$

Consideremos el efecto de nuestra transformación Mst sobre las coordenadas baricéntricas.

$$Wt = SMst$$

$$w[\tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} = [\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2]\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{M}\mathrm{st}$$

$$[w\tau_0 \quad w\tau_1 \quad w\tau_2]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2]\begin{bmatrix} w_0 u_0 & w_0 v_0 & w_0 \\ w_1 u_1 & w_1 v_1 & w_1 \\ w_2 u_2 & w_2 v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

$$[w\tau_0 \quad w\tau_1 \quad w\tau_2]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[w_0\sigma_0 \quad w_1\sigma_1 \quad w_2\sigma_2]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que nos muestra que

$$[w\tau_0 w\tau_1 w\tau_2 \ ] = [W_0\sigma_0 \ W_1\sigma_1 \quad W_2\sigma_2 \ ].$$

Luego el efecto de la transformación Mst en las coordenadas baricéntricas es simplemente una multiplicación: $W\tau_i = W_0\sigma_i$. Una vez que logremos determinar las constantes W_0, W_1 y W_2, podremos encontrar W usando la condición $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1$.

La pregunta es ahora como determinar W_0, W_1 y W_2. Recordemos que tenemos cuatro pares de puntos S_3 y t_3 y que S_3 Mst= t_3. Si escribimos las coordenadas baricéntricas para S como $[\sigma_{\tilde{0}} \ \ \sigma_{\tilde{1}} \ \ \sigma_{\tilde{2}}]$ y las de t como $[\tau_{\tilde{0}} \ \ \tau_{\tilde{1}} \ \ \tau_{\tilde{2}}]$, tenemos, salvo por un reescalamiento,

$$W_i = \tau_{\tilde{i}} / \sigma_{\tilde{i}}$$

Dicho de otro modo, en las coordenadas baricéntricas, la Mst es simplemente una matriz diagonal

$$w[\tau_0 \quad \tau_1 \quad \tau_2] = [\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2]\begin{bmatrix} \frac{\tilde{\tau_0}}{\tilde{\sigma_0}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{\tau_1}}{\tilde{\sigma_1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{\tau_2}}{\tilde{\sigma_2}} \end{bmatrix}$$

donde $\tau_{\tilde{i}}$ y $\sigma_{\tilde{i}}$ son las coordenadas baricéntricas de S_3 y t_3, respectivamente.

Esta es una expresión muy sencilla para Mst. Sin embargo es necesario un trabajo adicional para encontrar las coordenadas baricéntricas S usando

$$[\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2]\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad 1]$$

$$[\sigma_0 \quad \sigma_1 \quad \sigma_2] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

y después recuperando el punto del conjunto de llegada t de sus coordenadas baricéntricas.

Resumiendo, la transformación $S.t$ se construye de la siguiente manera:

1. Buscando las coordenadas baricéntricas de S.

2. calculando $W\ \tau_i = (\frac{\tilde{\tau_1}}{\tilde{\sigma_1}})\,\sigma_i$,

3. normalizando las coordenadas de tal forma que $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1$,

4. y recuperando t de sus coordenadas baricéntricas.

El método de Olynyk es similar en espíritu al de Heckbert, ya que ambos hacen un paso intermedio en el camino de encontrar la transformación Mst. Heckbert descompone Mst en dos transformaciones pasando por un conjunto estándar de puntos, los vértices del cuadrado unidad. El de Olynyk descompone Mst pero antes pasa a las coordenadas baricéntricas, las cuales son individualmente escaladas.

La mejora final de Blinn

Blinn encontró un tercer método basado en el trabajo de Heckbert y en el de Olynyk, que se caracteriza por una simplicidad asombrosa. Seguiremos la idea de Heckbert de factorizar Mst a través de puntos intermedios b_i. En lugar de usar el cuadrado unidad, elegiremos números en el plano proyectivo que tengan como coordenadas la mayor cantidad posible de ceros:

$$b_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Observemos que dos de estos puntos están en infinito, pero no es algo objetable. Para describir la transformación Mbt, notemos que

$b_i \quad Mbt, = \ t_i \ = [W_iU_i \quad W_iV_i \quad W_i]$. Considerando los tres primeros puntos $b_0, b_1, y \ b_2$ tenemos que

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} Mbt := \begin{bmatrix}w_0u_0 & w_0v_0 & w_0\\w_1u_1 & w_1v_1 & w_1\\w_2u_2 & w_2v_2 & w_2\end{bmatrix}.$$

Luego la transformacion Mbt :

$$Mbt :=$$

$$\begin{bmatrix}w_0u_0 & w_0v_0 & w_0\\w_1u_1 & w_1v_1 & w_1\\w_2u_2 & w_2v_2 & w_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_0 & 0 & 0\\0 & w_1 & 0\\0 & 0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & v_0 & 1\\u_1 & v_1 & 1\\u_2 & v_2 & 1\end{bmatrix}.$$

Todo lo que necesitamos ahora es encontrar W_0, W_1 y W_2 , y lo podemos hacer usando el cuarto punto:

$$b_3Mbt = t_3$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_0 & 0 & 0\\0 & w_1 & 0\\0 & 0 & w_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & v_0 & 1\\u_1 & v_1 & 1\\u_2 & v_2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w_3u_3 & w_3v_3 & w_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}w_0 & w_1 & w_2\end{bmatrix}=w_3\begin{bmatrix}u_3 & v_3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0 & v_0 & 1\\u_1 & v_1 & 1\\u_2 & v_2 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

Vemos aquí una clara relación con el método de Olynyk: W_0 , W_1, W_2 no son nada más que las coordenadas baricéntricas de t_3 multiplicadas por W_3,

$$[w_0 \quad w_1 \quad w_2] = w_3\,[\tau_0^{\sim} \;\; \tau_1^{\sim} \;\; \tau_2^{\sim}].$$

Como Mbt está definida salvo por una constante multiplicativa, podemos elegir W_3 de modo arbitrario. Si lo tomamos

$$W_3 = \det \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & \mathbf{1} \\ u_1 & v_1 & \mathbf{1} \\ u_2 & v_2 & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

entonces

$$[w_0 \quad w_1 \quad w_2] = [u_3 \quad v_3 \quad 1] \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix}^{*}.$$

Usando los datos del espacio de llegada , definimos la matriz

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix},$$

de tal modo que

$$[w_0 \quad w_1 \quad w_2] = [u_3 \quad v_3 \quad 1]\,\mathbf{T}^{*}.$$

Por supuesto, todavía nos falta encontrar Msb de manera análoga:

$$Mbs = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \mathrm{S},$$

donde

$$[z_0 \quad z_1 \quad z_2] = [x_3 \quad y_3 \quad \mathbf{1}]\mathbf{S}^*$$

y S es la matriz formada por los datos del espacio de llegada:

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & \mathbf{1} \\ x_1 & y_1 & \mathbf{1} \\ x_2 & y_2 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Poniendo todo junto, tenemos que

$$Mst = MsbMbt$$

$$= Mbs^* \quad Mbt$$

$$\mathrm{S} \begin{bmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} w_0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}^*$$

$$\mathrm{S} \begin{bmatrix} w_0 z_1 z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 w_1 z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 z_1 w_2 \end{bmatrix} \mathbf{T}^*.$$

Para coronar esto, Blinn nos da una interpretación geométrica simple para los W_i y Z_i. Recordemos que

$$[w_0 \quad w_1 \quad w_2] = [u_3 \quad v_3 \quad 1]\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix}^*$$

$$= [u_3 \quad v_3 \quad 1]\begin{bmatrix} v_1 - v_2 & v_2 - v_0 & v_0 - v_1 \\ u_2 - u_1 & u_0 - u_2 & u_1 - u_0 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_2 v_0 - u_0 v_2 & u_0 v_1 - u_1 v_0 \end{bmatrix},$$

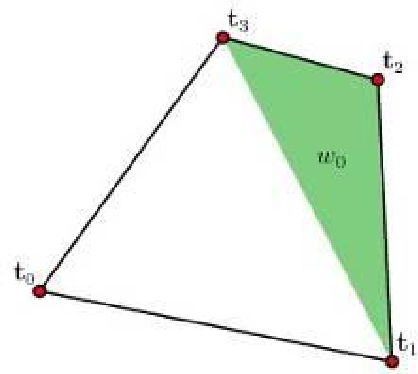
por lo cual

$$w_0 = (u_1 - u_3)(v_2 - v_3) - (u_2 - u_3)(v_1 - v_3)$$

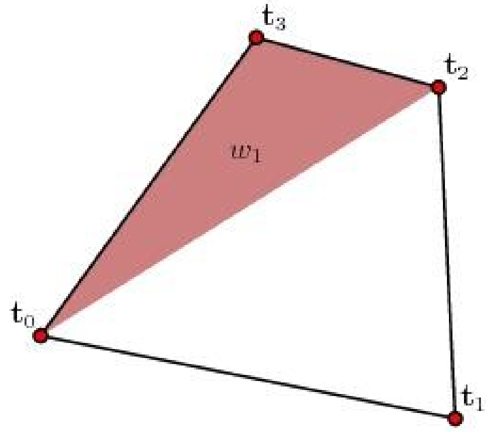
$$w_1 = (u_2 - u_3)(v_0 - v_3) - (u_0 - u_3)(v_2 - v_3)$$

$$w_2 = (u_0 - u_3)(v_1 - v_3) - (u_1 - u_3)(v_0 - v_3).$$

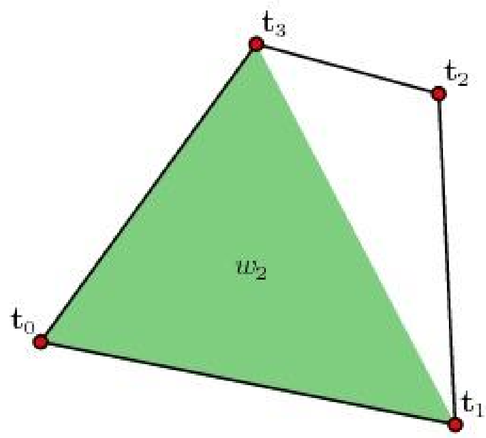
Estas expresiones demuestran que W_i puede ser interpretada como el doble del área signada de uno de los triángulos formados por los puntos t_i. En la imagen de abajo se representa con verde un área positiva y con rojo una negativa



t_3
t_2
w_0
t_0
t_1



t_3
t_2
w_1
t_0
t_1



Resumen

Es difícil imaginar una expresión más simple para Mst :

$$Mst = S \begin{bmatrix} w_0 z_1 z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_0 w_1 z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_0 z_1 w_2 \end{bmatrix} T^{*}.$$

Recordando que S está formado a partir de los datos del espacio de partida y T de los datos t_i del espacio de llegada, solo necesitamos calcular los W_i y Z_i, pero vimos más arriba que esto no es complicado. Como mostramos podemos encontrar Mst resolviendo un sistema homogéneo de 8×9 ecuaciones. Sin embargo, no perdiendo de vista la naturaleza geométrica del problema, tanto Heckbert, Olynyk, y Blinn encontraron formas cada vez más simples para Mst .

Referencias

- Jim Blinn, Inferring Transforms in *Jim Blinn's Corner: Notation, Notation, Notation.* Morgan Kaufmann. 2003. (Como todas las columnas de Blinns, esta esta escrita claramente y ademas es muy entretenida.)
- Paul Heckbert, *Fundamentals of Texture Mapping and Image Warping*. Master's Thesis, University of California, Berkeley, 1989.

Colaboración de la Dra. Carina Boyallián.
Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.