Polinomios recíprocos, números irracionales y ecuaciones de recurrencia. Parte II

Antonio Cafure, Nardo Giménez, Santiago Guaraglia

1 Introducción

Este artículo constituye la continuación, la segunda parte, de nuestro trabajo *Polinomios recíprocos, números irracionales y ecuaciones de recurrencia. Parte I.* En el mismo habíamos iniciado un trabajo con los denominados polinomios recíprocos: un polinomio $f \in [t]$ de grado n mayor o igual que 1 se dice recíproco si verifica que

$$f(t) = t^n f(1/t).$$

En el primer artículo de esta serie declarábamos que nos interesa mostrar cómo eligiendo un tópico concreto (en este caso, polinomios recíprocos) es posible establecer vínculos con diversas nociones matemáticas y como las mismas dan lugar a diferentes problemáticas que podrían tratarse en diferentes estadios de la formación de profesores de matemática. que podrían aportar una mirada diferenciada sobre cómo abordar ciertos aspectos de la formación de profesores de matemática.

En esta segunda parte continuamos con las ideas desplegadas en la primera, "aplicando" las mismas al tratamiento de otros problemas. El trabajo está dividido en tres secciones cuyo contenido describimos.

El interés de la Sección 2 estriba en sacar provecho de las técnicas desarrolladas para polinomios recíprocos, ahora, para tratar con números complejos; en concreto, raíces de la unidad. Esto nos conduce naturalmente a discutir la irracionalidad de ciertos valores de las funciones trigonométricas desde un lugar poco común -cuanto menos en los tratamientos didácticos usuales: un cierto número es irracional si es raíz de un polinomio con coeficientes racionales que no posee raíces racionales. La noción de número algebraico está al alcance de nuestras manos.

Otra intención de nuestro trabajo es recalcar la importancia de ahondar en los métodos propuestos e indagar acerca de sus alcances y sus limitaciones; sus implicancias no sospechadas. En este sentido, en la Sección 3, abordamos el estudio de las fórmulas de recurrencia que subyacen a los métodos desarrollados para tratar con polinomios recíprocos. Es simplemente una consecuencia del principio de inducción pero al servicio de un problema concreto. Sin embargo, aun cuando nuestro relato podría culminar en este punto, no lo hace; esta misma recurrencia es la que juega un papel fundamental en demostrar la irracionalidad de los números $\cos r\pi$ para $r \in \mathbb{Q}$, salvo una cantidad finita de excepciones. El Teorema 3.1, en el cual se presenta este resultado, es una adaptación, una relectura del que se presenta en el libro *An introduction to the theory of numbers* ([NZM91]) de I. Niven, H. Zuckerman y H. Montgomery.

Finalmente, en la Sección 4 retomamos las ideas anteriores y presentamos una reinterpretación de la noción f_{rev} en términos funcionales. Es decir, consideramos $f \mapsto f_{\mathsf{rev}}$ como una función definida sobre $\mathbb{Q}[t]$. Ponemos en discusión ideas tan básicas pero fundamentales como las de funciones inyectivas y suryectivas. La experiencia indica que discutirlas en este contexto contribuye a resignificar el sentido de dichas nociones ya que para avanzar sobre las mismas no es suficiente con recitar la definición.

Al igual que en la primera parte, encontramos a lo largo del texto un gran número de ejercicios que cobran un rol fundamental en la construcción del relato que se está narrando. Requieren que el lector se involucre de manera directa en la construcción, en la comprensión de las ideas que se intentan transmitir.

Finalmente, una observación con respecto a las referencias. Cuando leamos, por ejemplo, Ejercicio 21.I, estamos remitiendo al lector al Ejercicio 21 de *Polinomios recíprocos, números irracionales y ecuaciones de recurrencia. Parte I.*

2 Recíprocos, raíces de la unidad y números irracionales

Consideremos el polinomio $f = t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$. El Ejercicio 21.I, nos permitió demostrar que dicho polinomio es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$. La circunstancia es propicia entonces para recordar un contexto en el cual surge f y para recordar, también, que es válida la siguiente factorización en $\mathbb{Q}[t]$:

$$t^5 - 1 = (t-1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1).$$

Las raíces de $t^5 - 1$ son las denominadas raíces quintas de la unidad. En consecuencia, la factorización de f en $\mathbb{C}[t]$ involucra las raíces quintas de la unidad distintas de 1. Estas, que pueden expresarse en la forma

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

proporcionan la factorización de f en $\mathbb{C}[t]$:

$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = \prod_{k=1}^{4}(t - \omega_k).$$

Ejercicio 1 *¿Por qué podemos asegurar que las raíces de f son distintas entre sí? Verificar que la parte imaginaria de cada ω_k es distinta de* 0.

Como f es recíproco, sabemos entonces que las raíces $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ deben vincularse de a pares: una y su inverso multiplicativo.

Ejercicio 2 *Verificar que los pares de raíces inversas son (ω_1, ω_4) y (ω_2, ω_3).*

Con la sustitución $x = t + t^{-1}$ planteada en el Ejemplo 3.3.I tiene lugar la transformación

$$t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 \quad \longmapsto \quad x^2 + x - 1, \tag{1}$$

y, de acuerdo al Ejercicio 2, las raíces de la cuadrática x^2+x-1 deben ser $\omega_1+\omega_4$ y $\omega_2+\omega_3$. Al mismo tiempo, es fácil encontrar que las raíces de dicha cuadrática son los números reales y no racionales $1/2+1/2\sqrt{5}$ y $1/2-1/2\sqrt{5}$. Estamos en una instancia en la cual debemos destacar, al menos, dos puntos: por un lado, es evidente que $\omega_1+\omega_4$ y $\omega_2+\omega_3$ deben coincidir con $1/2+1/2\sqrt{5}$ y $1/2-1/2\sqrt{5}$, aunque no es evidente cómo coinciden; por el otro, esta coincidencia implica que $\omega_1+\omega_4$ y $\omega_2+\omega_3$ (suma de números complejos no reales) son números reales distintos de 0. Esta situación debería ser un indicio de que entre los pares (ω_1, ω_4) y (ω_2, ω_3) se establece una relación en la cual no solo uno es inverso del otro. Si la suma es un número real estos complejos -cuanto menos- poseen partes imaginarias de signo contrario; pero a la vez tienen igual módulo y la suma no es 0, lo que explica finalmente que deben ser conjugados sobre $\mathbb{R}$, es decir, $\overline{\omega}_1 = \omega_4$ y $\overline{\omega}_2 = \omega_3$. Es necesario observar que el hecho de que dos números complejos además de inversos sean conjugados solo puede acontecer cuando los mismos tienen módulo 1. Como estamos tratando con raíces de la unidad, esta caracterización nos incluye.

Ejercicio 3 *En este ejercicio, demostramos las afirmaciones enunciadas en el párrafo previo. Por ese motivo, supongamos que z_1 y z_2 son dos números complejos arbitrarios.*

1. *z_1 tiene un solo conjugado sobre $\mathbb{R}$ si y solo si z_1 es real.*

2. *Si el módulo de z_1 es igual al de z_2 y la suma $z_1 + z_2$ es un número real no nulo entonces z_1 y z_2 son conjugados sobre $\mathbb{R}$.*

3. *$z_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tiene módulo 1 si y solo si $\overline{z}_1$, el conjugado sobre $\mathbb{R}$ (distinto de z_1) coincide con el inverso multiplicativo de z_1.*

Ejercicio 4 *En el Ejercicio 2 ya demostramos que (ω_1, ω_4) y (ω_2, ω_3) son inversos multiplicativos. Mostrar ahora que, además, son conjugados.*

En suma, todas estas discusiones implican que son válidas las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \omega_1 + \frac{1}{\omega_1} &= \omega_1 + \omega_4 = \omega_1 + \overline{\omega_1} = 2\cos\tfrac{2\pi}{5} \\ \omega_2 + \frac{1}{\omega_2} &= \omega_2 + \omega_3 = \omega_2 + \overline{\omega_2} = 2\cos\tfrac{4\pi}{5}. \end{aligned} \tag{2}$$

De esta manera, demostramos que $2\cos\frac{2\pi}{5}$ y que $2\cos\frac{4\pi}{5}$ son las raíces de $x^2 + x - 1$ y que son válidas estas otras igualdades:

$$2\cos\tfrac{2\pi}{5} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5},$$

$$2\cos\tfrac{4\pi}{5} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}.$$

No podemos dejar de mencionar una consecuencia interesante -tanto por la información que se obtiene como por el aspecto metodológico implícito- que de aquí se deriva y que consiste en disponer de un nuevo valor explícito (en forma cerrada, como se suele expresar) para nuestra tabla de valores de las funciones trigonométricas:

$$\cos(2\pi/5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{5}.$$

Ejercicio 5 *Calcular el valor de sen*$(2\pi/5)$*, tg*$(2\pi/5)$*, cos*$(\pi/5)$*, cos*$(\pi/10)$ *e imaginar que otros se pueden calcular.*

También podemos responder otra pregunta que podríamos habernos formulado: ¿es racional $\cos 2\pi/5$? La respuesta es más o menos inmediata desde el momento en que sabemos que $\cos(2\pi/5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sqrt{5}$. Si fuera racional, $\sqrt{5}$ lo sería y bien sabemos que no es así. Acaso lo que nos debería llamar la atención, lo que nos debería sorprender, es la forma indirecta en que respondimos la pregunta: mostramos que dicho número es igual a un número que, de antemano, sabíamos que era irracional. Inevitablemente surge otra pregunta: ¿cómo hubiéramos procedido ante la carencia de dicha igualdad? La manera usual de mostrar que un cierto número real no es racional consiste en suponer que lo es, expresarlo como un cociente de enteros a/b y, apelando al teorema fundamental de la aritmética, las argumentaciones concluyen en que un entero se factoriza en dos formas esencialmente distintas. Esta contradicción, producto de haber supuesto que el número de partida es racional, nos habilita a concluir que ese número es irracional. Este método, útil para demostrar la irracionalidad de los diversos radicales $\sqrt[m]{a}$, no hubiera sido de utilidad para demostrar que $\cos 2\pi/5$ es irracional.

Aun cuando no hubiéramos sabido que $\cos 2\pi/5$ es igual a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5}$, igualmente, podríamos haber concluido que $\cos 2\pi/5$ es irracional. Por ese motivo, nos importa explicitar lo que está sugerido, lo que se insinúa en las argumentaciones previas. Que las raíces de $x^2 + x - 1$ sean los números reales $2\cos(2\pi/5)$ y $2\cos(4\pi/5)$ solo es consecuencia de la transformación (1) y de las igualdades establecidas en (2); pero no de haber calculado las raíces de la cuadrática en la forma típica. A la vez, el criterio de Gauss -que indica cuales son las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales- muestra que $x^2 + x - 1$ no tiene raíces racionales. De estas dos condiciones deducimos que estos números no pueden ser racionales, es decir, son irracionales.

Se abre ante nosotros un nuevo panorama, una nueva manera de abordar el problema de determinar la irracionalidad de algunos números: mostrar que son raíces de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que no tienen raíces racionales. Este abordaje propicia, simultáneamente, la ligazón entre dos nociones sin conexión aparente (por lo menos, si echamos un vistazo a las propuestas didácticas para tratar la noción de número irracional), que son la de irracionalidad de números reales y la de polinomio con coeficientes racionales. Es la puerta de entrada para discutir una noción poco discutida en el ámbito de la formación docente -aunque presente en la enseñanza secundaria- y de una importancia superlativa tanto desde una perspectiva matemática como pedagógica, que es la de número algebraico.

Ejercicio 6 *Consideremos el polinomio* $f = t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1$.

1. *Proporcionar la factorización de f en $\mathbb{C}[t]$.*

2. *Utilizar los métodos expuestos en los ejemplos para obtener la factorización de f en $\mathbb{R}[t]$.*

3. *A partir de la factorización en $\mathbb{R}[t]$ demostrar que f es irreducible en $\mathbb{Q}[t]$.*

4. *Encontrar un polinomio de grado 3 con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que tenga como raíz a $2\cos(2\pi/7)$.*

5. *Concluir que $\cos 2\pi/7$ es un número irracional.*

En esta sección si bien hemos presentado como ejercicios resultados muy conocidos sobre números complejos, lo cierto es que uno se percata de la utilidad ciertos resultados cuando los pone a actuar en la resolución de un problema concreto. Si no presentamos un contexto en el cual resulte significativo, en el cual cobre sentido, es posible que la permanencia de los mismos sea fugaz y el interés que podrían despertar sería casi insignificante. No queremos decir que, a partir de ahora, dichos resultados vayan a permanecer en nuestra memoria pero sí que, quizás, al saber a qué fines pueden contribuir es más sencillo que se produzca un anclaje de dichas ideas.

3 Fórmulas de recurrencia y valores de funciones trigonométricas

En el Ejercicio 23.I seguramente surgió la necesidad -al realizar la sustitución $x = t + t^{-1}$- de expresar $t^4 + t^{-4}$ en términos de x; en concreto, como un polinomio en x. Uno más junto a los que encontramos en el Ejemplo 3.3.I para $t^2 + t^{-2}$ y $t^3 + t^{-3}$. Es natural imaginar que si tenemos un polinomio recíproco de grado 10, debamos expresar $t^5 + t^{-5}$ como un polinomio en x y, yendo más allá, que esto suceda con $t^n + t^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si la situación requiere que tengamos que tratar con polinomios recíprocos de grado $2n$.

Representemos por f_n el polinomio (en realidad, no lo sabemos) con coeficientes racionales en x que define $t^n + t^{-n}$. Por los ejemplos ya tratados sabemos que

$$f_0 = 2, \quad f_1 = x, \quad f_2 = x^2 - 2, \quad f_3 = x^3 - 3x.$$

Ejercicio 7 *Verificar que $f_4 = x^4 - 4x^2 + 2$ y que $f_5 = x^5 - 5x^3 + 5x$.*

De ser factible, encontrar una expresión general, una ¡¡fórmula¿¿ para f_n facilitaría la tarea de calcularlos. O en todo caso, encontrar una expresión de tipo recursiva que muestre algún tipo de relación entre los mismos. Si observamos con atención resulta que

$$\begin{array}{lclcl} f_2 & = & xx - 2 & = & xf_1 - f_0 \\ f_3 & = & x(x^2-2) - x & = & xf_2 - f_1 \\ f_4 & = & x(x^3 - 3x) - (x^2 - 2) & = & xf_3 - f_2, \\ f_5 & = & x(x^4 - 4x^2 + 2) - (x^3 - 3x) & = & xf_4 - f_3, \end{array}$$

todo lo cual sugiere una posible recursión:

$$f_{n+1} = x \cdot f_n - f_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

que, en caso de ser cierta, implicaría que f_n (la expresión de $t^n + t^{-n}$ en función de x) es, efectivamente, un polinomio de grado n con coeficientes enteros para cada $n \in \mathbb{N}$. ¿Cómo confirmamos lo que hemos intuido? Una manera de hacerlo es convencerse, así sin más, calculando f_6, f_7, f_8 y verificando que la recursión planteada sigue en pie. Aunque si pretendemos dar argumentos, digamos, definitivos, independientes de nuestro arbitrio, el método de inducción es el indicado para tal empresa.

Ya verificamos que la recursión es válida para $n = 2$ y $n = 3$. Supongamos que la recursión es válida para todo natural menor o igual que n (ésta es la hipótesis inductiva) y tratemos de mostrar que también es válida para $n + 1$

(éste es el paso inductivo de la demostración). Mostrar que la recursión es válida es lo mismo que mostrar que $t^{n+1} + t^{-(n+1)}$ se puede calcular a partir de $t^n + t^{-n}$ y de $t^{n-1} + t^{-(n-1)}$, en la forma que la recursión lo establece. Para el paso inductivo de la demostración notemos entonces que es sencillo verificar que

$$t^{n+1} + t^{-(n+1)} = (t + t^{-1})(t^n + t^{-n}) - (t^{n-1} + t^{-(n-1)}).$$

De aquí, como asumimos que es cierto que $t^n + t^{-n}$ se expresa mediante un polinomio f_n de grado n con coeficientes enteros y que $t^{n-1} + t^{-(n-1)}$, por un polinomio f_{n-1} de grado $n-1$ con coeficientes enteros, es inmediato concluir que f_{n+1} es un polinomio de grado $n+1$ y con coeficientes enteros. El paso inductivo de la demostración se derivó de la validez de la recursión para dos casos anteriores (n y $n-1$) con lo cual debemos establecer la validez de la afirmación para dos casos iniciales: fue lo que hicimos con 0 y 1. El principio de inducción justifica entonces que la recursión es válida.

Ejercicio 8 *Calcular f_n para $n = 6, 7, 8, 9, 10$.*

Ejercicio 9 *Algunas cuestiones para pensar.*

- *Calcular el valor de $f_n(0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
- *Calcular el valor de $f_n(2)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
- *Estudiar qué ocurre con los coeficientes de f_n cuando n es primo.*
- *Estudiar la factorización de f_n en $\mathbb{Q}[x]$.*

En definitiva, hemos demostrado que si $x = t + t^{-1}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $t^n + t^{-n}$ se expresa como un polinomio $f_n \in \mathbb{Q}[x]$, mónico y de grado n. Con esta transformación, cualquier polinomio recíproco $f \in \mathbb{Q}[t]$ de grado $2n$ se aplica en un polinomio $g \in \mathbb{Q}[x]$ de grado n.

Llegamos al punto en que el relato de esta sección podría darse por terminado; pero preferimos no hacerlo. Los polinomios f_n definidos mediante la recurrencia (3) poseen una característica particular que no hubiéramos imaginado. Considerándolos como funciones polinómicas, verifican que para cualquier número real θ

$$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta^1. \tag{4}$$

Para demostrar esta afirmación vamos a suponer que t es el número complejo de módulo unitario

$t = cos\theta + i \cdot sen\theta.$

Luego, si $x = t + 1/t$ resulta entonces que $x = 2\cos\theta$. Como consecuencia del Teorema de de Moivre, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$t^n + \frac{1}{t^n} = 2\cos n\theta.$$

La validez de (4) se deriva entonces del hecho de que $t^n + 1/t^n$ es un polinomio $f_n \in \mathbb{Q}[x]$.

Tomemos ahora el caso particular en que θ es un múltiplo racional de π; es decir, existe un número racional r tal que $\theta = r \cdot \pi$. Como r es un número racional existe un número natural n -a decir verdad, existen infinitos naturales que logran tal cometido- tal que nr es un número entero. Eligiendo para ese valor de n el correspondiente polinomio f_n definido por la recurrencia (3) y recordando la propiedad (4), resulta que

$$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta = 2\cos nr \cdot \pi = \pm 2,$$

[1]La sucesión de polinomios f_n está estrechamente vinculada con la sucesión de los polinomios de Chebyshev. Estos pueden definirse (una entre varias posibles definiciones) mediante la recurrencia $T_0 = 1$, $T_1 = x$ y $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$. La relación entre f_n y T_n viene dada por la identidad $T_n(x) = 1/2f_n(2x)$. En particular, si $-1 \leq x \leq 1$ se puede demostrar que $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.

dependiendo el signo de si nr es par o impar. De esta forma, tenemos que $2\cos\theta$ es una raíz del polinomio $f_n - \pm 2$, que tiene coeficientes enteros y coeficiente principal igual a 1. Criterio de Gauss mediante, las raíces racionales del polinomio $f_n - \pm 2$ son números enteros, con lo cual si $2\cos\theta$ fuera racional entonces debería ser un entero. Dado que $|\cos\theta| \leq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, los únicos valores enteros posibles para $2\cos\theta$ son $0, \pm 1, \pm 2$. De aquí deducimos que los posibles valores racionales que puede tomar $\cos r\cdot\pi$ son

$$0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1,$$

y que efectivamente -aquí tendremos que rememorar algunos valores que toma la función coseno- alcanza estos valores. En suma, toda esta argumentación nos muestra que, salvo por las excepciones mencionadas, los números del tipo $cosr\cdot\pi$, con r un número racional resultan irracionales.

Después de haber establecido la irracionalidad de dichos números, la cuestión que surge es qué ocurre con los números $senr\cdot\pi$ y $tgr\cdot\pi$. Pues bien, la respuesta es la que intuimos: deberían ser irracionales salvo algunas excepciones.

Si $\theta = r\cdot\pi$ es un múltiplo racional de π entonces también $\pi/2 - \theta$ lo es y, así, de la identidad $sen\theta = cos(\pi/2 - \theta)$ se desprende que los números $senr\cdot\pi$ son irracionales excepto cuando son iguales a $0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$.

Para estudiar que tipo de número es $tgr\cdot\pi$, el primer impulso bien podría ser el de recordar la identidad válida para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$tg\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}.$$

Como probamos más arriba, si $cosr\cdot\pi$ fuera racional entonces sería alguno de los números $0, \pm 1, \pm 1/2$. Si $cosr\cdot\pi = 0$ (por ejemplo, $cos\pi/2$) entonces $tgr\cdot\pi$ no está definida, y no es posible extraer ninguna conclusión. Si $\cos r\cdot\pi$ tomara alguno de los valores 1 ó -1, inmediatamente $senr\cdot\pi$ sería igual a 0 y $tgr\cdot\pi$ sería igual a 0. En forma similar, si $cosr\cdot\pi$ fuera igual a $\pm 1/2$ tenemos que $senr\cdot\pi$ tomaría alguno de los valores $\pm\sqrt{3}/2$, siendo $tgr\cdot\pi$ igual a $\pm\sqrt{3}$, según corresponda. En definitiva, desde esta línea de argumentación encontramos que 0 es un posible valor racional para $tgr \cdot \pi$ pero no podemos asegurar que no haya otros. De hecho, sabemos que $tg\pi/4$ es igual a 1 y, empero, nuestra línea de razonamiento no detectó este valor.

Argumentemos entonces asumiendo que $cosr \cdot \pi$ es irracional. Aquí, la simpleza de expresar $tg\theta$ como $sen\theta/cos\theta$ conlleva la dificultad de que, aún cuando sepamos que tanto $cosr \cdot \pi$ como $senr \cdot \pi$ son números irracionales, no podemos asegurar que lo sea el cociente; el conjunto de números irracionales es un conjunto carente de estructura: no es cerrado bajo suma ni bajo producto.

Por este motivo es necesario apelar -quizás elaborando otra serie de argumentos sea posible continuar la línea previa y arribar a una conclusión exitosa, no lo sabemos- a otras formas de expresar $tg\theta$. En concreto, la siguiente identidad, válida para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$cos2\theta = \frac{1 - tg^2\theta}{1 + tg^2\theta}. \tag{5}$$

Lo interesante de esta identidad es que invierte el orden de las variables expresando $cos\theta$ en función de $tg\theta$, lo que permite realizar afirmaciones directamente sobre $tg\theta$, asumiendo desde el principio que toma valores racionales y, en contraste con lo previo, nuestra argumentación será completamente exhaustiva. Entonces si $tgr \cdot \pi$ fuera racional la identidad (5) explica por qué $cos2r \cdot \pi$ también lo sería. Solo es necesario estudiar los casos en que $cos2r \cdot \pi$ es igual a 0, $\pm 1/2$ ó ± 1, pues esos son los únicos valores racionales que toma $cos2r \cdot \pi$. Más arriba ya analizamos lo que acontece con $tgr \cdot \pi$ cuando $cosr \cdot \pi$ toma los valores $\pm 1/2$ y ± 1. Resta analizar el caso en que $cos2r \cdot \pi$ es igual a 0; pero, si $cos2r \cdot \pi = 0$ de (5) deducimos que $tgr \cdot \pi$ es igual a 1 ó a -1, valores que alcanza en los números de la forma $\pi/4 + k \cdot \pi$ y $3/4\pi + k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), respectivamente. De esta manera, demostramos que los únicos valores racionales que toma $tgr \cdot \pi$, con $r \in \mathbb{Q}$, son 0 y ± 1.

Nos hallamos en una situación ideal como para enunciar el resultado que se demostró en los párrafos precedentes. Nuestro discurrir consistió en una adaptación, en una reflexión sobre un teorema que se presenta en el texto *An introduction to the theory of numbers* de I. Niven, H. Zuckerman y H. Montgomery, que resumimos en el siguiente teorema ([NZM91]).

Teorema 3.1 *[NZM91, Theorem 6.16] Sea θ un múltiplo racional de π; es decir, $\theta = r \cdot \pi$ con $r \in \mathbb{Q}$. Entonces $cos\theta$, $sen\theta$ y $tg\theta$ son números irracionales exceptuando los casos en los cuales $tg\theta$ no está definido y las excepciones*

$$cos\theta = 0, \pm 1/2, \pm 1; \quad sen\theta = 0, \pm 1/2, \pm 1; \quad tg\theta = 0, \pm 1.$$

Ejercicio 10 *Verificar la validez de la identidad (5) para todo $\theta \in \mathbb{R}$.*

Las identidades trigonométricas constituyen (o mejor, ¿constituían?) uno de esos tópicos escolares cuya ajenidad es manifiesta ya que, en la mayoría de los casos, no se presentan problemas que requieran conocerlas; las actividades que se proponen consisten usualmente en una serie de manipulaciones algebraicas, no evidenciándose cuál es el interés de tratarlas. No nos parece inadecuado indicar que estamos ante una situación en la que se puede vislumbrar algún interés en contar con ellas ya que, con todo el trabajo previo, no hemos hecho otra cosa que demostrar un resultado de suma relevancia, un resultado que que atañe a la irracionalidad de los valores de las funciones trigonométricas en los múltiplos racionales de π.

La noción de número irracional es una noción de una profundidad que acaso no podamos imaginar. Un tratamiento completo de la misma excedería unos cuantos volúmenes, motivo por el cual, cualquier abordaje serio, profundo de la misma, requiere de recortes en las elecciones de los contenidos. Un gran texto que desarrolla esta noción y sus vinculaciones con diferentes aspectos de la matemática sigue siendo el clásico escrito por I. Niven: *Irrational numbers* [Niv56]. Con todo, nos asombra sobremanera el sinnúmero de propuestas didácticas pretendiendo abordar esta noción, justificándose en que la misma no es comprendida por los alumnos.

La usanza -y no está mal que así sea siempre y cuando no seamos proclives a simplificar las cosas hasta el punto de volverlas irrelevantes- indica que un número real es irracional si no se puede escribir como cociente de números enteros; también, que un número irracional es aquel que en su desarrollo decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Esta última afirmación, de una validez a toda prueba, puede no resultar la caracterización más conveniente de la irracionalidad de un número. De hecho, esta caracterización no tuvo incidencia alguna en la demostración del Teorema 3.1. Sin embargo, la caracterización de los números reales como desarrollos decimales reviste la mayor importancia. Un estudio detallado y profundo de $\mathbb{R}$ como el conjunto de desarrollos decimales se puede encontrar en el libro de G. Matera, recientemente publicado, *Análisis Matemático. Un enfoque constructivo* [Mat12].

4 Una función definida sobre $\mathbb{Q}[t]$

Volvemos a la Sección 2.I con la intención de reinterpretar, en otros términos, lo allí expuesto. La definición de f_{rev} es la que corresponde a definir la siguiente asignación:

$$\begin{array}{rcccc} \mathsf{Rev} & : & \mathbb{Q}[t] & \longrightarrow & \mathbb{Q}[t] \\ & & f & \mapsto & f_{\mathsf{rev}} \end{array}$$

Como hemos visto, Rev está bien definida -una manera elegante de expresar que una asignación es, efectivamente, una función- lo cual habilita la reinterpretación de los enunciados previos en términos funcionales. Asumimos además que $\mathsf{Rev}(0) = 0$.

Solemos estudiar la inyectividad y la suryectividad de funciones diversas, pero esto generalmente se limita a funciones, digamos, numéricas. En primer lugar, no hay que subestimar la dificultad del problema aun cuando trabajamos con funciones numéricas. No es nada sencillo determinar si una función es inyectiva o suryectiva -excepto en los casos que se eligen con ese fin- ya que lo que esto involucra es la resolución de ecuaciones y debemos tener siempre presente que resolver ecuaciones es una tarea de una dificultad extrema. (La confusión usual radica en pensar que la manera de resolver ecuaciones es despejando.)

La profundidad de estos conceptos acaso pueda percibirse al abordar ejemplos no numéricos. Por ese motivo, consideramos propicia la ocasión para tratarlos desde este ejemplo concreto.

Comencemos estudiando la inyectividad de la función Rev. Por ejemplo, si planteamos la ecuación $\mathsf{Rev}(f) = 1$, donde f representa la "incógnita" observamos que la misma tiene al menos dos soluciones en $\mathbb{Q}[t]$ (el dominio de la función Rev): los polinomios t y 1. Esto implica que la función Rev no es inyectiva. Podríamos haber elegido cualquier otro polinomio con el objeto de concluir que Rev no es inyectiva: la ecuación $\mathsf{Rev(f)} = \frac{2}{3} + \mathsf{5t}$ tiene al menos 2 soluciones en $\mathbb{Q}[t]$ dadas por $\frac{2}{3}t + 5$ y $\frac{2}{3}t^2 + 5t$. En cuanto a la ecuación $\mathsf{Rev(f)} = \mathsf{0}$, tiene al polinomio 0 como única solución.

Ejercicio 11 *Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{Q}[t]$ de la ecuación $\mathsf{Rev}(f) = 1$. Verificar que para cada $n \in \mathbb{Z}$ mayor o igual que 0 existe un único polinomio de grado n que es solución de la ecuación.*

Ejercicio 12 *Encontrar todas las soluciones en $\mathbb{Q}[t]$ de la ecuación $\mathsf{Rev}(f) = t^2 + 2t + 3$. Verificar que para cada $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 2 existe un único polinomio de grado n que es solución de la ecuación.*

La cuestión es ahora estudiar la suryectividad de la función Rev. El ejercicio previo muestra que el polinomio 1 pertenece a la imagen de Rev. En general, para estudiar la suryectividad deberíamos considerar un polinomio g arbitrario en $\mathbb{Q}[t]$ y decidir si la ecuación $\mathsf{Rev(f)} = \mathsf{g}$ tiene solución en $\mathbb{Q}[t]$. Notemos el contraste evidente con los ejemplos numéricos y la manera típica de proceder.

¿Cómo despejamos en este contexto? ¿Qué nos dice nuestra intuición? Lo más probable es que no tengamos ninguna idea de lo que está sucediendo, con lo cual, quizás sea conveniente tratar casos particulares. Podemos interrogarnos acerca de si, por elegir un caso, la ecuación $\mathsf{Rev}(\mathsf{f}) = \mathsf{t}$ tiene solución en $\mathbb{Q}[t]$.

Ejercicio 13 *Verificar que ningún polinomio de grado a lo sumo* 2 *es solución de la ecuación* $\mathsf{Rev}(f) = t$. *Generalizar las ideas desplegadas para demostrar que la ecuación no tiene soluciones en* $\mathbb{Q}[t]$ *y concluir que* Rev *no es suryectiva.*

Ejercicio 14 *Con argumentos similares al del ejercicio previo estudiar la existencia de soluciones en* $\mathbb{Q}[t]$ *de las siguientes ecuaciones* $\mathsf{Rev}(f) = 2t^2 + 3t$ *y* $\mathsf{Rev}(f) = 2t^2 + 3t - 5$. *En caso de que la ecuación tenga soluciones, dar una descripción del conjunto solución.*

Llegamos entonces a que la función Rev no es inyectiva ni suryectiva. El problema clásico que surge es cómo redefinir la función para que sea biyectiva. Esto nos lleva a restringir el dominio y a encontrar la imagen.

Por un lado, dado un polinomio $f \in \mathbb{Q}[t]$ de grado n resulta que $f_{\mathsf{rev}}(0) \neq 0$. En efecto, esto puede deducirse, por ejemplo, de la Definición 2.3. Recíprocamente, si $g \in \mathbb{Q}[t]$ es cualquier polinomio tal que $g(0) \neq 0$, resulta que $\mathsf{Rev}(g_{\mathsf{rev}}) = g$. De esta manera, mostramos que

$$\text{Imagen}\,\mathsf{Rev} = \{f \in \mathbb{Q}[t] : f(0) \neq 0\} \cup \{0\}.$$

Finalmente, siguiendo lo planteado en los Ejercicios 11 y 12 observamos que para cada g no nulo perteneciente a la imagen de Rev existe un único polinomio f en $\mathbb{Q}[t]$ de igual grado que g, tal que $f(0) \neq 0$ y tal que $\mathsf{Rev}(f) = g$. O sea, que la argumentación no solo nos permite caracterizar la imagen de Rev sino, además, redefinir el dominio para que sea biyectiva. Resumimos dicho desarrollo en la siguiente proposición:

Proposición 4.1 *La función* Rev *definida en la forma*

$$\mathsf{Rev} : \{f \in \mathbb{Q}[t] : f(0) \neq 0\} \cup \{0\} \longrightarrow \{f \in \mathbb{Q}[t] : f(0) \neq 0\} \cup \{0\}$$

resulta ser biyectiva y preserva el grado; es decir el grado del polinomio imagen es el mismo que el de partida.

Ejercicio 15 *La función* Rev *define una relación de equivalencia sobre* $\mathbb{Q}[t]$*. Dados* f *y* g *en* $\mathbb{Q}[t]$ *decimos que son equivalentes si tienen la misma imagen por* Rev*, o sea:*

$$f \sim g \quad \text{si y solo si} \quad f_{\mathsf{rev}} = g_{\mathsf{rev}}.$$

Lo que importa no es tanto demostrar que, efectivamente, es una relación de equivalencia como caracterizar el conjunto de clases de equivalencia, el conjunto cociente.

Ejercicio 16 *La operación que hemos definido sobre* $\mathbb{Q}[t]$*, es decir* $-_{\mathsf{rev}}$*, ¡¡distribuye¿¿ con el producto de elementos de* $\mathbb{Q}[t]$*, es decir, si* f *y* g *pertenecen a* $\mathbb{Q}[t]$ *entonces* $(f \cdot g)_{\mathsf{rev}} = f_{\mathsf{rev}} \cdot g_{\mathsf{rev}}$*. Es una situación sumamente favorable como para comenzar a discutir qué tipo de estructura podemos considerar sobre* $\mathbb{Q}[t]$ *y el producto de polinomios, disponiendo, a la vez, de la función* Rev *como un ejemplo concreto de función que preserva la estructura asignada.*

5 Algunas conclusiones

A nuestro entender, como insinuamos en la introducción de este artículo, la principal razón de ser del mismo, es la apuesta por un modo de entender la matemática que podría resultar de relevancia cuando de educación matemática y formación de profesores de matemática se trata. Consideramos que con la tarea esbozada contribuimos a afianzar, por un lado, y a poner en tela de juicio, por otro, ciertas ideas que rodean la enseñanza de un tópico como el de polinomios. Como señalamos, los mismos pueden erigirse como eje vertebrador de diferentes tratamientos de contenidos: desde el álgebra, desde el análisis, desde la aritmética, etc.

Estas afirmaciones se entrelazan, volviendo a la referencia de Sadovsky, con la posibilidad de llevar a cabo un trabajo que no tenga en cuenta los tiempos fijados por la currícula escolar, poder desentenderse de esta suerte de corsé establecido, sin perjuicio de la formación; más bien, atendiendo las genuinas necesidades de los profesores en formación y los profesores en ejercicio.

References

[Mat12] G. Matera. *Análisis Matemático. Un enfoque constructivo.* Ediciones UNGS, Los Polvorines, Buenos Aires, 2012.

[Niv56] I. Niven. *Irrational numbers.* The Carus Mathematical Monographs. The Mathematical Association of America, Cambridge, 1956.

[NZM91] I. Niven, H. Zuckerman, and H. Montgomery. *An introduction to the theory of numbers.* John Wiley & sons, New York, fifth edition, 1991.

Antonio Cafure. *Instituto de Desarrollo Humano, UNGS; Ciclo Básico Común, UBA.* e-mail: acafure@ungs.edu.ar

Nardo Giménez, Santiago Guaraglia. *Instituto de Desarrollo Humano, UNGS.* e-mail: agimenez@ungs.edu.ar

Santiago Guaraglia. *Ciclo Básico Común, UBA.* e-mail: sguarag@bigua.dm.uba.ar