

Estudio Aerodinámico de Perfiles No Delgados con el Método de Red de Vórtices

Marcelo F. Valdez^{1,2}, Santiago Ribero^{3,4} y Sergio Preidikman^{3,4}

¹ Instituto de Investigaciones en Energía no Convencional (INENCO), Univ. Nac. de Salta – CONICET, Salta, Argentina.

² Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina

³ Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), Univ. Nac. de Córdoba – CONICET, Córdoba, Argentina

⁴ Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Univ. Nac. de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina

Fecha de recepción del manuscrito: 02/03/2021

Fecha de aceptación del manuscrito: 30/04/2021

Fecha de publicación: 30/04/2021

Resumen—En este trabajo, se presenta un estudio numérico de las características aerodinámicas de perfiles alares mediante el método de red de vórtices (VLM). La implementación computacional desarrollada permite simulaciones del tipo estacionarias, cuasi-estacionarias e inestacionarias de perfiles aerodinámicos en dos dimensiones. En este trabajo, se cuantifica el error de estimación de la herramienta computacional en función de la geometría del perfil alar: espesor y curvatura de la línea media (combadura), y de la discretización. Se observa que para los perfiles NACA el error de estimación de la pendiente de sustentación aumenta al aumentar el espesor del perfil, pero se mantiene acotado entre el 5% y el 20% para espesores de hasta el 12%. Con respecto a la curvatura la línea media del perfil, el error en la estimación de la sustentación para ángulo de ataque nulo aumenta al aumentar la combadura y puede alcanzar el 50%. Finalmente, para el perfil DU97W300, la herramienta numérica demuestra un gran potencial ya que predice con gran precisión la distribución de presión experimental para ángulos de ataque relativamente pequeños y también estima con un error menor al 10% la pendiente de sustentación y sustentación para ángulo de ataque nulo.

Palabras clave—Perfiles no Delgados, Aerodinámica, Vortices Puntuales, Flujo Potencial

Abstract—In this article, a numerical study of the aerodynamic characteristics of wing sections conducted by using the vortex lattice method (VLM) is presented. The developed computational implementation can handle steady-state, quasi-steady and unsteady two-dimensional problems. In this article, the estimation error of the computational tool is quantified in terms of the geometry of the wing section: thickness and curvature of the mean line (camber), and of the discretization. It is observed that for the NACA profiles, the error of the estimation of the lift slope increases when the thickness increases but remains bounded between 5% and 20% for thicknesses up to 12%. Regarding the camber, the error of the estimation of the lift at zero angle of attack increases with increasing camber and can reach values up to 50%. Finally, for the profile DU97W300, the numerical tool shows a lot of potential since it can predict with high accuracy the experimental pressure distribution for relatively low angles of attack and also estimates the lift slope and lift for zero angle of attack with an error less than 10%.

Keywords—Thick Airfoils, Aerodynamics, Point Vortices, Potential Flow

INTRODUCCIÓN

Aún con los grandes avances en el campo de la dinámica de fluidos computacional (CFD), de la mano del desarrollo de hardware con mayor capacidad de cálculo, todavía resultan imprescindibles (y continuarán siéndolo en el futuro) los métodos “ingenieriles” que permitan obtener es-

timaciones de la distribución de presión sobre los cuerpos inmersos en el seno de un fluido, las cargas aerodinámicas resultantes, etc., sin invertir tiempo ni recursos en otros aspectos del problema que no resultan estrictamente relevantes. Estos métodos son, en general, aquellos que derivan de las hipótesis de flujo potencial. En contraste, las estrategias tradicionales de CFD, tales como RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes), LES (Large Eddy Simulation), DES (Detached Eddy Simulation) y DNS (Direct Numerical Simulation), entre otros, requieren resolver todas las variables del flujo (campo de velocidad y campo de presión, energía cinética turbulenta, etc.), no sólo sobre la superficie de los cuerpos

inmersos, donde por lo general recae el interés, sino también en todos los puntos del dominio fluido alrededor de los mismos. Desde el punto de vista ingenieril, la habilidad de relacionar las prestaciones aerodinámicas con la geometría del cuerpo (un ala por ejemplo) es en muchas situaciones muy importante (Katz, 2019). Mientras que los métodos clásicos de flujo potencial exponen muchas veces de manera explícita la dependencia de las cargas aerodinámicas con el espesor de un cuerpo, su combadura, su cuerda, etc., los software de CFD tradicionales requieren grandes cantidades de simulaciones para detectar algún tipo de tendencia. Finalmente, muchos problemas no-lineales de interacción fluido-estructura, tales como flutter y otras inestabilidades aeroelásticas, pueden requerir una gran cantidad de iteraciones entre el modelo estructural y el modelo del fluido. Esto es relativamente sencillo de lograr con los modelos de flujo potencial y altamente complejo y costoso, en términos de tiempo y recursos computacionales, con los métodos tradicionales de CFD.

No hay dudas que la simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes es el futuro de la dinámica de fluidos computacional. Sin embargo, los costos, tiempo y recursos humanos y computacionales necesarios para aplicar dicha estrategia a sistemas de escala ingenieril con geometrías o configuraciones de flujo complejas lo hacen prohibitivo en la actualidad. Hasta que ese futuro se materialice, será necesario continuar recurriendo a modelos “ingenieriles”, al menos durante etapas de diseño preliminar, para obtener estimaciones de los aspectos micro (distribución de presiones) y macro (cargas aerodinámicas) del problema sin la necesidad del empleo de recursos computacionales intensivos ni de largos períodos de espera.

Los modelos de vorticidad distribuida en la superficie basados en la hipótesis de flujo potencial, han sido empleados desde los inicios de la industria aeronáutica a principios del siglo XX y en otras industrias afines (Ingeniería del Viento) para la estimación del flujo y las cargas aerodinámicas sobre cuerpos inmersos en fluidos. Una de sus variantes más difundida, el método de red de vórtices (VLM por sus siglas en inglés), es aquella en que las regiones que contienen vorticidad sobre la superficie de los cuerpos (capa límite) y en las estelas son primero aproximadas por sábanas vorticosas de espesor infinitesimal y luego discretizadas mediante la introducción *vórtices puntuales* (Katz y Plotkin, 2001). En su versión más simple, el VLM, así como el resto de los métodos de paneles (que emplean como singularidades fuentes/sumideros, dobletes y combinaciones de singularidades) sólo resuelven el flujo en la región irrotacional del dominio fluido. Además, la solución general del flujo potencial no es única, por lo que son necesarias consideraciones físicas adicionales, como la condición de Kutta para cerrar correctamente el sistema de ecuaciones. Se requieren modelos adicionales, para representar los fenómenos asociados a la capa límite: transición laminar/turbulenta, separación de capa límite (salvo indirectamente por medio de la imposición de la condición de Kutta en puntos de separación prescriptos *a priori*), etc. Por lo tanto, tampoco es posible estimar la resistencia de fricción (viscosa) de los cuerpos. Estos métodos de flujo potencial han sido empleados satisfactoriamente en el pasado, y su convergencia a la solución analítica cuando la malla es refinada suficientemente ha sido demostrada (Katz, 2019).

Numerosas alternativas han sido propuestas para mejorar o incrementar las capacidades de los modelos de vorticidad distribuida. Por ejemplo, Ramesh et al. (2014) propuso y validó un criterio de separación de flujo desde el borde de ataque basado en el valor de la succión de borde de ataque. También existen distintas estrategias para acoplar la solución incompresible e irrotacional y no viscosa de dichos métodos con las ecuaciones de la capa límite. En particular, los métodos basados en las ecuaciones integrales de la capa límite (ecuación integral de momento lineal de von Karman, ecuación integral de energía, etc.) son atractivos por su relativa simplicidad. Entre la diversas alternativas, se destacan los trabajos de Drela y Giles (1987); Drela (1989) que condujeron a la elaboración del software XFOIL. En el esquema numérico propuesto por Drela, las ecuaciones integrales de la capa límite y de flujo potencial exterior a esta (obtenido mediante paneles de distribución lineal de vorticidad en las superficies sólidas y paneles fuente para las estelas) son resueltas simultáneamente.

Para perfiles aerodinámicos de espesor pequeño, la aproximación de espesor nulo (o perfil delgado) es comúnmente empleada para reducir la dimensión del problema. Sin embargo, para perfiles alares con espesores considerables dicha aproximación no resulta apropiada. Al mejor conocimiento de los autores, no existe un estudio sistemático del error (respecto a resultados experimentales) del método de red de vórtices en la estimación de las características aerodinámicas de perfiles alares no delgados de uso extendido en las industrias aeronáutica y de energía eólica. En este trabajo, se presenta una implementación computacional del VLM para la estimación del flujo de aire alrededor de perfiles alares no delgados. La precisión de la herramienta numérica se cuantifica analizando distintos perfiles alares. En particular, se analizan perfiles de la familia NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) y un perfil de la familia DU (Delft University) de aplicación en turbinas eólicas. Si bien la atención se centra en las características aerodinámicas estacionarias, la herramienta computacional presentada también permite simular flujos no estacionarios, en los que es necesario modelar la generación y la evolución de las estelas generadas por los cuerpos.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección Materiales y Métodos se presentan primero la formulación matemática general para el flujo incompresible e irrotacional exterior a la capa límite y a las estelas en el límite de número de Reynolds infinito. Seguidamente se introduce la aproximación de las ecuaciones que resultan de la discretización de las sábanas vorticosas por medio de redes de vórtices puntuales. Finalmente, se presentan los resultados de los estudios de aplicación de la herramienta numérica. En primer lugar se estudia el perfil van de Vooren. Seguidamente se estudian algunos perfiles de la familia NACA de cuatro dígitos simétricos y no simétricos con distintos espesores y combaduras. Finalmente se estudia el perfil DU97W300 para aplicaciones en turbinas eólicas. Para terminar el artículo se discuten los resultados y se presentan las conclusiones del trabajo.

MATERIALES Y MÉTODOS

En flujos incompresibles y caracterizados por números de Reynolds elevados, el espesor de las regiones fluidas que concentran la vorticidad, la capa límite adyacente a las superficies sólidas de los cuerpos y las estelas emitidas por ellos, se vuelve muy pequeño. En el límite cuando $Re \rightarrow \infty$ estas regiones pueden idealizarse como superficies de discontinuidad a través de las cuales la componente tangencial de la velocidad del fluido experimenta un salto finito. Esta representación matemática de la capa límite y las estelas se conoce como sábana vorticosa. Fuera de las sábanas vorticosas el flujo es irrotacional, por lo tanto puede ser analizado con la teoría de flujo potencial.

La ecuación de continuidad para flujos incompresibles ($\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = 0$) e irrotacionales ($\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$) es equivalente a la ecuación de Laplace (1) para el potencial de velocidad Φ :

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega, \quad (1)$$

donde, \mathbf{r} es el vector posición de los puntos del dominio fluido $\Omega \subset \mathbb{E}^2$. El campo de velocidad del flujo $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r}, t)$ debe satisfacer la condición de no penetración sobre las superficie sólidas del cuerpo:

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}^+} (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\zeta}, t) = 0, \quad (2)$$

$$\forall \boldsymbol{\zeta} \in \partial \mathcal{B}, t \in [0, \infty),$$

donde $\partial \mathcal{B}$ denota la superficie del cuerpo sólido \mathcal{B}^1 , $\boldsymbol{\zeta} \in \partial \mathcal{B}$ es el vector posición de un punto en $\partial \mathcal{B}$, y $\hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\zeta})$ y $\mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta})$ son el vector unitario normal a la superficie del cuerpo y la velocidad, respectivamente, de dicho punto. El supraíndice "+" se emplea para indicar que \mathbf{r} se aproxima a $\boldsymbol{\zeta}$ desde la región ocupada por el fluido.

Además, las perturbaciones en el flujo introducidas por la presencia de los cuerpos deben atenuarse lejos de los mismos. Esta condición de regularidad de la solución en el infinito es satisfecha automáticamente por las soluciones fundamentales (vórtice, fuente/sumidero, doblete) de la ecuación de Laplace (1). Para flujos incompresibles e irrotacionales, la ecuación de Bernoulli no estacionaria puede emplearse para obtener el campo de presión en todo el dominio fluido, una vez conocido el potencial de velocidad Φ . Esta ecuación tiene la siguiente expresión:

$$p(\mathbf{r}, t) - p_{\infty} = \frac{\rho}{2} (\mathbf{u}_{\infty} \cdot \mathbf{u}_{\infty} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) - \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(\mathbf{r}, t) - \Phi_{\infty}), \quad (3)$$

donde el subíndice ∞ se emplea para indicar condiciones (velocidad, presión, etc.) del flujo no perturbado. Al evaluar el límite de la ec. (3) cuando $\mathbf{r} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}^+ \in \partial \mathcal{B}$ se obtiene la distribución de presión sobre la superficie sólida $\partial \mathcal{B}$, que al ser integrada da por resultado las cargas aerodinámicas resultantes sobre el cuerpo.

¹Se identifica a los puntos materiales de un cuerpo \mathcal{B} o del dominio fluido Ω con las posiciones (vectores) \mathbf{r} que estos ocupan en los mismos. En este artículo se emplea la palabra "punto" para significar, o bien el punto material propiamente dicho, o su vector posición (Antman, 2005, Sec. 12.1).

Se distinguen dos tipos de sábanas vorticosas: las adheridas a las superficies sólidas, que modelan la capa límite infinitesimal y el salto discontinuo en la velocidad tangencial a través de ella, y las libres que modelan las estelas y se deforman libremente. Las sábanas vorticosas adheridas se mueven solidarias a los cuerpos y sus configuraciones son conocidas; por lo tanto, deben producir un salto finito de presión a través de ellas. Las sábanas vorticosas libres, por el otro lado, no pueden acomodar un salto de presión y por lo tanto están libres de fuerzas. Ambas sábanas vorticosas coalescen en los puntos afilados del cuerpo donde se produce la separación de flujo (por ejemplo, en el borde de fuga de un perfil aerodinámico).

En un punto cualquiera del dominio fluido $\mathbf{r} \in \Omega$, y debido a la linealidad de la ecuación de continuidad (1), la velocidad del fluido puede descomponerse en la velocidad de la corriente no perturbada \mathbf{u}_{∞} y en las perturbaciones $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}$ y $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}$, asociadas a los campos de vorticidad concentrados en las sábanas vorticosas adheridas y libres, respectivamente. Esto se expresa matemáticamente como sigue:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{\infty}. \quad (4)$$

Para el flujo bidimensional en el plano $z-x$ (Fig. 1), los campos de velocidad $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t)$ se obtienen a partir los campos de vorticidad $\gamma_{\mathcal{B}}(s, t) \hat{\mathbf{j}}$ y $\gamma_{\mathcal{F}}(s) \hat{\mathbf{j}}$, respectivamente, mediante la ecuación de Biot-Savart (Katz y Plotkin, 2001, Sec. 2.11):

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\gamma_{\mathcal{B}}(s, t) \hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s, t))}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s, t)\|^2} ds, \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{F}} \frac{\gamma_{\mathcal{F}}(s) \hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s, t))}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s, t)\|^2} ds, \quad (6)$$

donde $\hat{\mathbf{j}}$ es el vector unitario normal al plano $z-x$, \mathcal{F} denota el conjunto de puntos materiales en la sábana vorticosa libre, s es un parámetro (usualmente la longitud de arco medida a lo largo de la curva) que identifica los puntos en las sábanas vorticosas cuyos vectores posición son $\boldsymbol{\zeta}(s)$.

La creación de la vorticidad libre en las estelas debe satisfacer la condición de Kelvin. Esta establece (para fluidos barotrópicos con viscosidad nula) que la circulación $\Gamma_{\mathcal{C}}$ alrededor de una curva material \mathcal{C} que encierra en todo momento a un cuerpo y a sus estelas se conserva:

$$\frac{D\Gamma_{\mathcal{C}}}{Dt} = 0. \quad (7)$$

En la ec. (7), D/Dt denota el operador derivada material. Al tratarse de un modelo no viscoso, la ubicación de los puntos separación de flujo sobre los cuerpos no puede ser predicha por el método. Por lo tanto, es necesario establecer *a priori* los puntos de separación de flujo, que por lo general, coinciden con los bordes afilados de los cuerpos. Se puede demostrar que en un punto de separación S , cuya posición está dada por $\boldsymbol{\zeta}_S$, la generación de vorticidad (o circulación) satisface la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{\boldsymbol{\zeta}_S} = \frac{1}{2} \left(u_{\text{slip}}^+{}^2 - u_{\text{slip}}^-{}^2 \right), \quad (8)$$

donde u_{slip} es la magnitud de la velocidad de deslizamiento entre el fluido y la superficie sólida adyacente $\mathbf{u}_{\text{slip}} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta})$, los superíndices $+$ y $-$ se refieren a las superficies que convergen al punto de separación “por encima” y “por debajo”, respectivamente, y $d\Gamma/dt$ es la velocidad de generación de circulación en el punto de separación. La expresión anterior es equivalente a la presentada por Prandtl y Tietjens (1934) (Capítulo XII.93). Una versión de la misma también fue empleada por Mook y Dong (1994), entre otros investigadores. Mayores detalles sobre esta ecuación se incluyen en el apéndice.

Finalmente, el movimiento de (los puntos materiales de) las sábanas vorticosas libres está dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}, t), \quad \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{F}. \quad (9)$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de Birkoff-Rott (Sección 8.1 de Saffman (1992)).

Método de Red de Vórtices (VLM) Bidimensional

En el presente trabajo se emplea el VLM para resolver las ecuaciones del flujo potencial alrededor de un perfil alar no delgado. En el VLM en dos dimensiones, la vorticidad $\gamma_{\mathcal{B}}$ de la sábana vorticiosa adherida a la superficie de un cuerpo \mathcal{B} es discretizada mediante una colección de N vórtices puntuales (Fig. 1) ubicados en posiciones $\boldsymbol{\zeta}_j := \boldsymbol{\zeta}(s_j)$ y con circulaciones $\Delta\Gamma_j$ ($j = 1, \dots, N$) de la siguiente manera:

$$\gamma_{\mathcal{B}}(s, t) \approx \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(s, t) \delta(s - s_j), \quad (10)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función generalizada delta de Dirac,

$$\Delta\Gamma_j(t) = \int_{s_j - \Delta s_j/2}^{s_j + \Delta s_j/2} \gamma_{\mathcal{B}}(s, t) ds, \quad (11)$$

y Δs_j es la longitud del elemento de discretización que contiene al vórtice puntual. Se demuestra en el Apéndice que, en virtud de esta discretización, la perturbación del flujo $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}$ (Eq. (5)) en un punto \mathbf{r} del dominio fluido debida a la sábana vorticiosa adherida de intensidad $\gamma_{\mathcal{B}}$ es aproximada como sigue:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t) \frac{\hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}_j)}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}_j\|^2}. \quad (12)$$

De manera similar, las sábanas vorticosas libres son discretizadas mediante una colección de $N_{\mathcal{F}}$ vórtices puntuales ubicados en posiciones $\boldsymbol{\zeta}_j^{\mathcal{F}}$ y con circulación $\Delta\Gamma_j^{\mathcal{F}}$ ($j = 1, \dots, N_{\mathcal{F}}$). Análogamente a la sábana adherida, la perturbación del flujo $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t)$ (Eq. (6)) en el punto \mathbf{r} del dominio fluido debida a la presencia de las sábanas vorticosas libres $\gamma_{\mathcal{F}}$ se aproxima entonces como sigue:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t) \approx \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{F}}} \Delta\Gamma_j^{\mathcal{F}} \frac{\hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}_j^{\mathcal{F}})}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}_j^{\mathcal{F}}\|^2}. \quad (13)$$

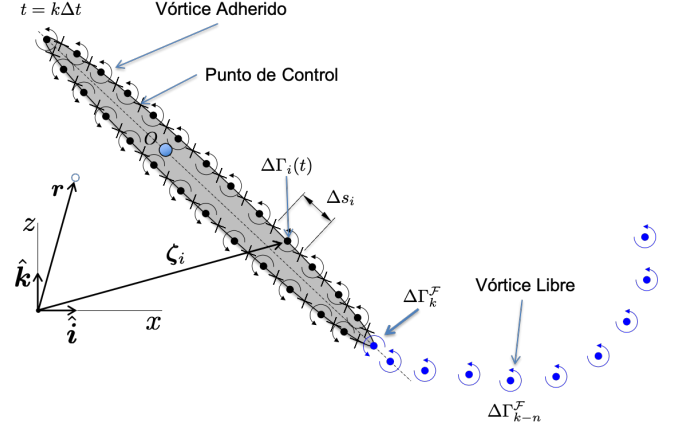


Fig. 1: Discretización de las sábanas vorticosas adheridas y libres en tiempo $t = k\Delta t$

Los vórtices puntuales de circulación $\Delta\Gamma_j^{\mathcal{F}} \approx \gamma_{\mathcal{F}}(s_j) \Delta s_j^{\mathcal{F}}$ son creados en los puntos de separación sucesivamente en cada paso de tiempo por medio de la ec. (8). Una vez creados, estos vórtices conservan su circulación y sus movimientos son dictados exclusivamente por la cinemática del campo de velocidad (ec. (9)). Por lo tanto, en un instante dado de tiempo, son conocidas tanto las posiciones como las circulaciones de los vórtices libres. Entonces, $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\mathbf{r}, t)$ dada por la ec. (13) puede ser calculada en todos los puntos del dominio fluido.

Como consecuencia de la discretización (10), la condición de no penetración (2) sólo puede ser impuesta en un número finito M de puntos de control distribuidos sobre la superficie sólida $\partial\mathcal{B}$. A partir de la ec. (12), se obtiene que la componente $\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{\zeta}_i, t)$ en la dirección normal $\hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\zeta}_i, t)$ a la superficie sólida en el punto cuya posición está dada por $\boldsymbol{\zeta}_i \in \partial\mathcal{B}$ tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \approx \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t) A_{ij}(t), \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad (14)$$

donde $A_{ij}(t)$ es el coeficiente de influencia del vórtice puntual j sobre el punto de control i .

En virtud de la descripción anterior, la condición de no penetración (ec. (2)) en un punto de control i sobre la superficie sólida $\partial\mathcal{B}$ se expresa como sigue:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \Delta\Gamma_j = [\mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}_i) - \mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{F}}}(\boldsymbol{\zeta}_i) - \mathbf{u}_{\infty}] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\zeta}_i), \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad (15)$$

donde se omitió la dependencia del tiempo para simplificar la notación.

Finalmente, la condición de Kelvin (7) en el tiempo $t_k = k\Delta t$ se expresa como sigue:

$$\sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t_k) + \sum_{j=1}^k \Delta\Gamma_j^{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t_{k-1}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta\Gamma_j^{\mathcal{F}} \\ \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t_k) = \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t_{k-1}) - \Delta\Gamma_k^{\mathcal{F}}. \quad (16)$$

Las ecuaciones (15) y (16) constituyen un sistema algebraico de $P = M + 1$ ecuaciones y $Q = N$ incógnitas que pue-

de representarse como sigue:

$$[A_{ij}(t)] \{\Delta\Gamma_j(t)\} = \{\text{RHS}_i(t)\}, \quad (17)$$

donde $[A_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{P \times Q}$, $\{\Delta\Gamma_j(t)\} \in \mathbb{R}^Q$, $\{\text{RHS}_i(t)\} \in \mathbb{R}^P$. Explícitamente la ec. (17) se expresa como sigue:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\Gamma_1(t_k) \\ \vdots \\ \Delta\Gamma_N(t_k) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RHS}_1(t_k) \\ \vdots \\ \text{RHS}_N(t_k) \\ \sum_{j=1}^N \Delta\Gamma_j(t_{k-1}) \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

La resolución del sistema lineal de ecuaciones (18) en cada instante de tiempo t_k permite obtener las circulaciones $\Delta\Gamma_j$ de los vórtices adheridos. Es importante destacar que, si bien el VLM requiere la solución de un sistema lineal de ecuaciones, equivalente a la versión discretizada de la ecuación de Laplace (1), el método es en realidad no lineal debido a que la ecuación de evolución temporal de las estelas (9) es no lineal.

Regularización del campo de velocidad de los vórtices

Se observa en las ecuaciones (12) y (13) que la velocidad del fluido tiende a infinito cuando algún vórtice se aproxima al punto en el que se evalúa dicha velocidad. Esta situación puede presentarse, por ejemplo, cuando dos vórtices libres en las estelas se aproximan demasiado entre sí. Esta singularidad en el campo de velocidad del fluido vulnera la estabilidad del método y debe ser evitada. Para limitar el valor de la velocidad, se emplean funciones de suavizado o *cutoff* que efectivamente convierten el vórtice puntual en un vórtice de núcleo finito de radio σ . En el presente trabajo, se emplean las funciones cutoff definidas en la Sección 2.2 de Valdez et al. (2017): para los vórtices adheridos se emplean núcleos de velocidad nula y para los vórtices libres un núcleo Gaussiano. En ambos casos se emplea un valor $\sigma = 0,25 \min_j \{\Delta s_j\}$.

Generación y Evolución de las Estelas

Las estelas son generadas desde los puntos de separación de los cuerpos. El esquema de separación y generación de las estelas se describe con mayor detalle en el Apéndice. El movimiento de los puntos materiales que conforman las estelas, identificados unívocamente por sus vectores posiciones $\boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}$ ($i = 1, \dots, k$), se estima integrando numéricamente la ec. (9) con un esquema explícito de Euler como sigue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}(t_{k+1}) &= \boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}, t) dt \\ &\approx \boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}(t_k) + \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}}, t_k) \Delta t, \quad \boldsymbol{\zeta}_i^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

El paso de tiempo fijo Δt se elige de manera que:

$$\Delta t \leq \frac{L_C}{V_C} = \frac{\min_{i=1, N} \{\Delta s_i\}}{\|\mathbf{u}_\infty - \mathbf{v}_0\|_2}. \quad (19)$$

donde \mathbf{v}_0 es la velocidad de translación del cuerpo, L_C es la longitud característica de la red de vórtices adherida, en este caso, la menor longitud de los elementos, y V_C es la velocidad característica del problema, en este caso, la velocidad relativa

del fluido respecto al cuerpo. Esta selección del Δt , análoga a la condición CFL (Courant-Friedrichs-Levy) para los métodos Eulerianos, garantiza la estabilidad del método y permite generar estelas con separaciones entre vórtices libres similares a las correspondientes de las mallas adheridas. Roesler y Epps (2018) mostró mediante simulaciones que sólo seleccionando $\Delta t = L_C/V_C$ es posible reproducir correctamente la solución clásica de Wagner (Wagner, 1925) para una placa plana.

RESULTADOS

El VLM fue implementado computacionalmente en un herramienta numérica. Esta herramienta se emplea a continuación para el análisis aerodinámico de distintos perfiles alares y para la cuantificación del error del VLM. En lo que resta del artículo, se emplean de manera intercambiable las denominaciones: VLM, método, herramienta numérica y computacional; todos para referirse a la implementación computacional del VLM desarrollada en este trabajo.

Perfil van de Vooren

Para verificar la correcta implementación computacional del VLM, se estudiarán los flujos estacionario y no estacionario alrededor de un perfil van de Vooren. La geometría de este perfil se obtiene por medio de una transformación conforme de un círculo de radio a en el plano complejo ζ al plano complejo z (Sección 6.6 de Katz y Plotkin (2001)) como sigue,

$$z = \frac{(\zeta - a)^k}{(\zeta - \varepsilon a)^{k-1}} + \ell, \quad (20)$$

donde k , ε y $\ell = c/2$ son parámetros asociados al ángulo del borde de fuga, el espesor del perfil t/c y la cuerda del perfil c , respectivamente. La solución analítica para el flujo potencial estacionario alrededor de este perfil puede ser obtenida analíticamente. En este caso, se emplea un perfil con un espesor del 15%, un ángulo de borde de fuga de 20° y una longitud de cuerda unitaria. Para ello, los parámetros elegidos son:

$$\ell = 0,5 \quad k = \frac{2\pi - \phi_{TE}}{\pi} = 1,89 \quad (21)$$

$$\varepsilon = 0,047216079 \quad a = 2^{1-k} \ell (1 + \varepsilon)^{k-1} = 0,2813. \quad (22)$$

La superficie del perfil se divide en segmentos que corresponden a arcos de circunferencia de igual longitud en el plano complejo ζ . Es decir, el círculo de radio a se divide en N segmentos iguales (todos con igual ángulo barrido $\Delta\theta = 2\pi/N$). Las ubicaciones de los vórtices con circulación $\Delta\Gamma_j$ sobre el perfil van de Vooren se obtienen mediante la transformación conforme (20) de dichos puntos. Los puntos de control se obtienen de manera similar transformando los puntos medios de cada arco de círculo anterior. Para el estudio de convergencia del VLM se emplean discretizaciones con $N = 2^n$ vórtices, donde $n = 4, 5, \dots, 10$. Para este perfil, el valor teórico del coeficiente de sustentación está dado por:

$$C_l = \frac{8\pi a}{c} \sin \alpha, \quad (23)$$

donde α es el ángulo de ataque. La distribución de presión sobre el perfil C_p para el flujo en estado estacionario se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$C_p(\theta) = 1 - \frac{|V(\theta)|^2}{U_\infty^2}, \quad (24)$$

donde U_∞ es la magnitud de \mathbf{u}_∞ y $V(\theta) \in \mathbb{C}$ es la velocidad compleja dada por la siguiente expresión:

$$V(\theta) = \frac{U_\infty}{dz/d\zeta} \left(e^{-j\alpha} - \frac{a^2}{\zeta} e^{j\alpha} \right) + j \frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \Big|_{\zeta=ae^{j\theta}}. \quad (25)$$

En la ec. (25), $j = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria y $0 \leq \theta < 2\pi$ es una coordenada angular en el plano ζ . La circulación total alrededor del perfil está dada por

$$\Gamma = 4\pi a \sin \alpha. \quad (26)$$

Distribución de presión debida al flujo estacionario sobre el perfil van de Vooren

En la Fig. 2 se presentan las predicciones de la distribución de presión sobre el perfil para flujo estacionario y un ángulo de ataque de 5° . Se comparan las predicciones de la herramienta computacional con la solución analítica (24). Para este caso particular, se observa que las discretizaciones a partir de $N = 32$ describen correctamente la distribución de presión en la región del borde de ataque. El efecto de la discretización sobre la distribución de presión es evidente a partir de la región media del perfil y especialmente notoria en la región del borde de fuga. Esto se debe a que en discretizaciones con pocos vórtices, el tamaño de los elementos en la región del borde de fuga del perfil es mayor que el espesor local del perfil en dicha región. En consecuencia, la influencia de un vórtice sobre un punto de control en la superficie opuesta puede resultar mayor que la influencia de los vórtices adyacentes a dicho punto de control sobre la misma superficie. Esto determina que la matriz de coeficientes de influencia $[A_{ij}(t)]$ no sea diagonalmente dominante.

Se observa que las predicciones del VLM convergen a la solución analítica al aumentar el número de vórtices puntuales empleados. En la Tabla 1, se resume el error medio cuadrático RMSE de las predicciones con respecto a la distribución teórica de C_p para distintos ángulos de ataque y discretizaciones. El error medio cuadrático se define como sigue:

$$\text{RMSE}(C_p) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (C_{p\text{VLM}}(\zeta_i) - C_p(\zeta_i))^2}.$$

Curva de sustentación y momento de cabeceo para flujo en estado estacionario

En las Figs. 3 y 4 se comparan las curvas teóricas y numéricas de sustentación $C_{l_{ss}}$ y de momento de cabeceo $C_{m_{0,ss}}$ alrededor del borde de ataque para distintas discretizaciones. Además se analiza la posición del centro de presión x_{cp} respecto del borde de ataque. Se observa claramente la convergencia del VLM con el aumento del número de vórtices puntuales usados en la discretización. En particular, a partir de $N = 32$ los resultados numéricos aproximan adecuadamente

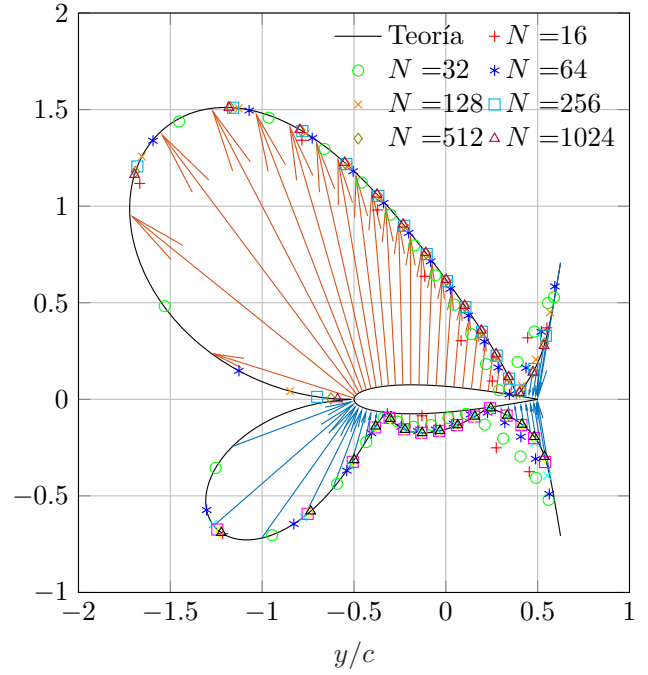


Fig. 2: Distrución de presión (C_p) sobre el perfil van de Vooren con espesor del 15% para flujo estacionario y ángulo de ataque de 5° en función del número de vórtices puntuales N . Las longitud de los vectores indican la magnitud de la presión, con los colores azul y rojo indicando sobrepresión y depresión, respectivamente.

la solución analítica, a pesar de la relativamente baja resolución en la distribución de presión. La posición teórica adimensional del centro de presión relativa al borde de ataque

TABLA 1: ERROR RMSE DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN SOBRE EL PERFIL VAN DE VOOREN CON 15% DE ESPESOR PARA DISTINTOS ÁNGULOS DE ATAQUE α Y DISTINTAS DISCRETIZACIONES

N	RMSE(C_p)			
	α			
	0°	5°	10°	20°
16	1.50×10^{-1}	1.50×10^{-1}	1.53×10^{-1}	1.65×10^{-1}
32	1.30×10^{-1}	1.29×10^{-1}	1.27×10^{-1}	1.19×10^{-1}
64	8.44×10^{-2}	8.38×10^{-2}	8.20×10^{-2}	7.51×10^{-2}
128	5.17×10^{-2}	5.13×10^{-2}	5.01×10^{-2}	4.57×10^{-2}
256	3.13×10^{-2}	3.10×10^{-2}	3.03×10^{-2}	2.76×10^{-2}
512	1.89×10^{-2}	1.88×10^{-2}	1.84×10^{-2}	1.67×10^{-2}
1024	1.15×10^{-2}	1.14×10^{-2}	1.11×10^{-2}	1.01×10^{-2}

TABLA 2: ERROR RMSE DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA CURVA DE $C_{l_{ss}}(\alpha)$ Y $C_{m_{0,ss}}(\alpha)$ PARA EL PERFIL VAN DE VOOREN CON 15% DE ESPESOR Y DISTINTAS DISCRETIZACIONES

N	RMSE	
	C_l	C_m
16	4.23×10^{-1}	8.13×10^{-2}
32	4.97×10^{-2}	2.90×10^{-2}
64	1.09×10^{-2}	8.40×10^{-3}
128	2.59×10^{-3}	2.22×10^{-3}
256	6.04×10^{-4}	5.68×10^{-4}
512	1.40×10^{-4}	1.43×10^{-4}
1024	3.25×10^{-5}	3.60×10^{-5}

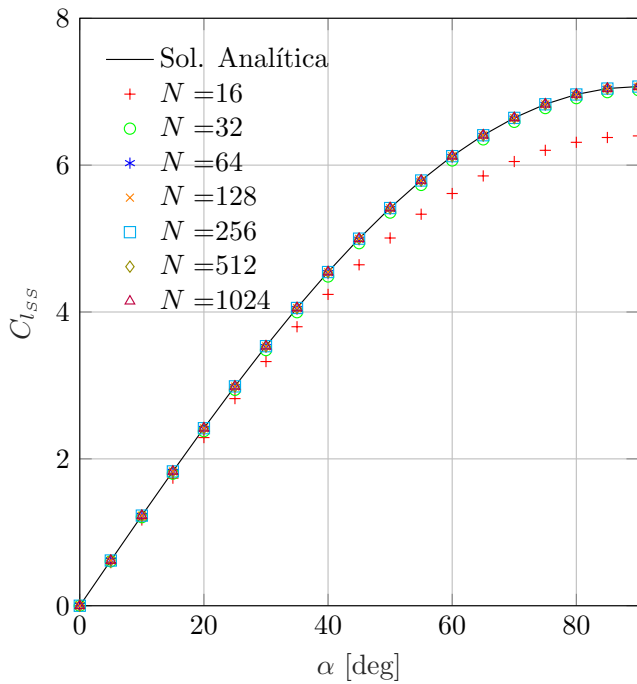


Fig. 3: Curva de sustentación $C_{l,ss}(\alpha)$ para flujo estacionario del perfil van de Vooren con 15% de espesor en función del número de vórtices puntuales N .

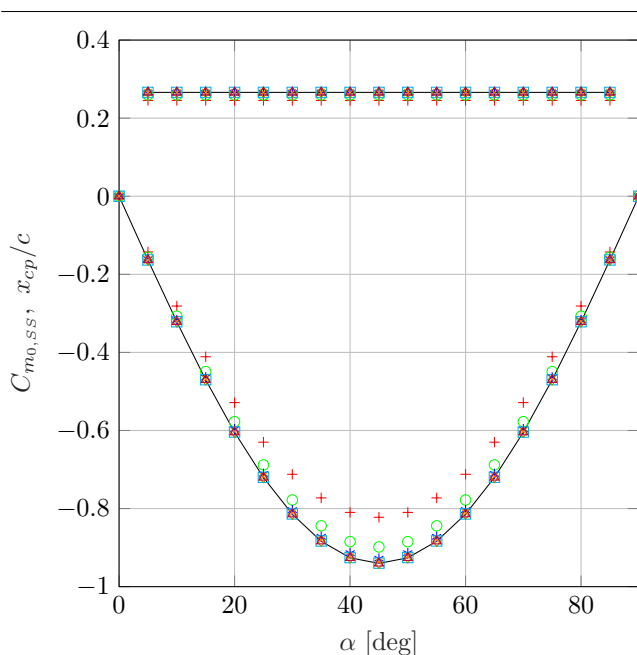


Fig. 4: Curva de momento de cabeceo $C_{m_{0,ss}}(\alpha)$ para flujo estacionario y posición del centro de presión del perfil van de Vooren con 15% de espesor en función del número de vórtices puntuales N . Las diferentes líneas y colores empleados fueron definidos en la Fig. 3

$x_{cp}/c = 0,26604$ se calcula a partir de la distribución teórica de presión.

Flujo no estacionario: Arranque Impulsivo del perfil van de Vooren

Se considera el caso de un arranque impulsivo del perfil van de Vooren con una velocidad dada por $\mathbf{v}(t) = -u(t)\hat{\mathbf{i}}$,

donde $u(\cdot)$ es la función escalón unitario de Heaviside y $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector unitario en la dirección horizontal. Según el conocimiento de los autores, no existe una solución analítica explícita de este problema para perfiles con espesor. Para una placa plana con ángulo de ataque pequeño (y con hipótesis de estela plana), la evolución de la sustentación es descrita por la función de Wagner (Wagner, 1925) que establece que la sustentación en $t = 0^+$ es igual a la mitad del valor estacionario. Sin embargo, estudios experimentales (Pullin y Perry, 1980) y teóricos para perfiles con bordes de fuga no ahusados (con ángulo finito ϕ_{TE}) demuestran que para estos perfiles la estela se enrolla inicialmente sobre el borde de fuga en contraposición con la hipótesis de estela plana. Graham (1983) predijo que para perfiles Kármán-Trefftz, la dependencia inicial de la sustentación con el tiempo es proporcional a $t^{(3-2\phi_{TE})/(2\phi_{TE}-1)}$ y por lo tanto es singular para $t = 0$.

A continuación se analiza el arranque impulsivo del perfil van de Vooren con ángulo de ataque fijo. Se consideran dos ángulos de ataque: uno pequeño $\alpha = 1^\circ$ y uno moderado de $\alpha = 10^\circ$.

La evolución temporal del coeficiente de sustentación del perfil van de Vooren para un ángulo de ataque $\alpha = 1^\circ$ se presenta en la Fig. 5 para distintas discretizaciones. Como referencia, se incluyen en la figura los valores de la solución clásica de Wagner (Wagner, 1925) para una placa plana y los resultados numéricos para la misma placa plana obtenidos con la herramienta desarrollada y una discretización de $N = 256$ vórtices. Se observa en primer lugar que la solución numérica de la placa plana aproxima apropiadamente la solución de Wagner. Esto confirma que el VLM predice una estela prácticamente plana como propusiera Wagner. En segundo lugar, con respecto al perfil van de Vooren, se aprecia que la sustentación del perfil en $t = 0^+$ es menor que la mitad de su valor estacionario $C_{l,ss}$ correspondiente. Además, se observa la tendencia de convergencia del VLM con el refinamiento de la discretización. La evolución temporal de la sustentación del perfil es similar a la descrita por la función de Wagner aunque con valores sensiblemente inferiores. Para este ángulo de ataque pequeño, la curva de $C_l/C_{l,ss}$ del perfil van de Vooren se encuentra siempre por debajo de la curva correspondiente a la placa plana.

La evolución temporal del coeficiente de sustentación del perfil van de Vooren para un ángulo de ataque de 10° se presenta en la Fig. 6 para distintas discretizaciones. Se observa, en primer lugar, que la evolución de la sustentación de la placa plana difiere considerablemente de la solución de Wagner. Esto se debe al enrollamiento de la estela que invalida la hipótesis de estela plana de Wagner. Con respecto al perfil van de Vooren, se observa que la evolución de la sustentación sigue una curva similar a la de la placa plana pero con algunas diferencias. En primer lugar, el valor de $C_l/C_{l,ss}$ es mayor para la placa plana que para el perfil van de Vooren hasta aproximadamente $tV_\infty/c = 7,5$. A partir de ese momento, la curva de $C_l/C_{l,ss}$ para el perfil van de Vooren se encuentra por encima de la correspondiente a la placa plana, pero ambas tendiendo al valor 1.

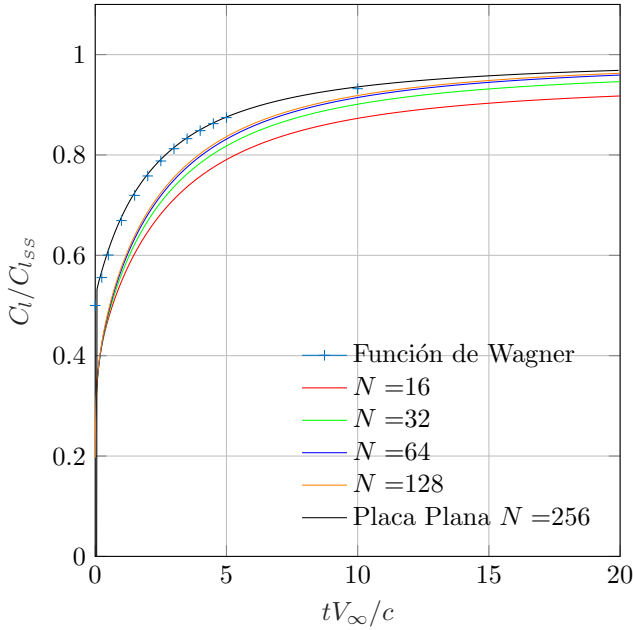


Fig. 5: Evolución temporal del coeficiente de sustentación de un perfil van de Vooren de espesor $t/c = 15\%$ con ángulo de ataque $\alpha = 1^\circ$.

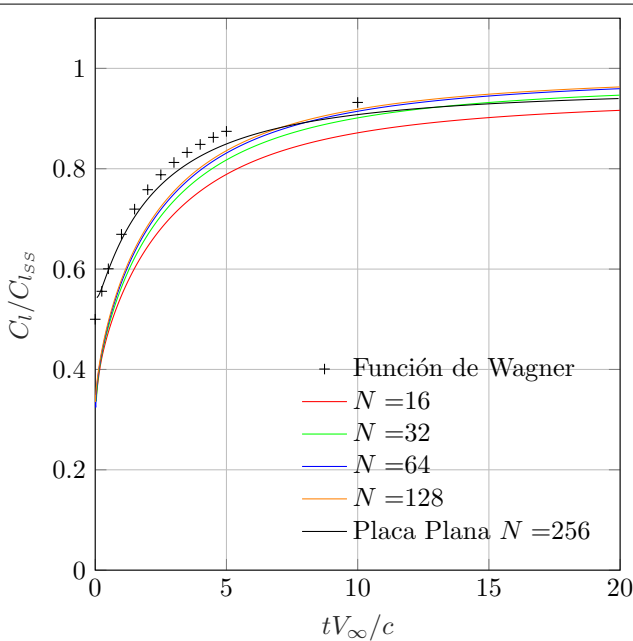


Fig. 6: Evolución temporal del coeficiente de sustentación de un perfil van de Vooren de espesor $t/c = 15\%$ con ángulo de ataque $\alpha = 10^\circ$.

Perfiles NACA de cuatro dígitos

En esta sección se estudian los perfiles NACA, cuyas prestaciones aerodinámicas han sido bien documentadas en la literatura. Se cuantifica la influencia del espesor y de la combadura de la línea media sobre la precisión de la implementación numérica del VLM. Primero, se analizan tres perfiles simétricos NACA de cuatro dígitos: NACA0006, NACA0009 y NACA0012 para determinar el efecto del espesor del perfil (6%, 9% y 12% de la cuerda, respectivamente). Finalmente, se estudian dos perfiles no simétricos de igual espesor, NACA1408 y NACA2408, para cuantificar el error del VLM

en función de la curvatura de la línea media del perfil. En la Tabla 3 se resumen los parámetros de los perfiles NACA empleados: espesor máximo t/c , combadura m/c y posición de la máxima ordenada de la línea media p/c . La geometría de estos perfiles fue generada mediante la formulación presentada en Jacobs et al. (1935).

Perfiles NACA simétricos

La estrategia de la generación de la red de vórtices sobre la superficie de los perfiles NACA simétricos se desarrolla en detalle en el Apéndice. Los ángulos θ_1 y θ_2 , que son los parámetros de la discretización, se eligen de manera de controlar la densidad de vórtices de la malla en las regiones adyacentes al borde de fuga y al borde de ataque del perfil, respectivamente. Una opción común es $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, que da por resultado igual densidad de vórtices en dichas regiones. Mediante simulaciones preliminares, se observó que la solución por VLM es poco sensible a la densidad de vórtices en el borde de ataque y muy sensible a la densidad de vórtices cerca el borde de fuga. Para las simulaciones en el resto de este artículo se seleccionan los siguientes valores: $\theta_1 = \pi/4$ y $\theta_2 = \pi/2$.

La comparación entre las curvas de sustentación $C_{l_{ss}}(\alpha)$ y de momento experimentales $C_{m,c/4}(\alpha)$ para flujo estacionario y las predicciones de la herramienta numérica para los perfiles NACA simétricos se presenta en las Figs. 7 a 12. En general, se puede apreciar que el VLM describe adecuadamente la curva de sustentación de estos perfiles para ángulos de ataque bajos $|\alpha| < 10^\circ$.

Se hace notar que no se dispone de los datos experimentales propiamente dichos, sino que éstos fueron extraídos de los gráficos en el Apéndice IV de Abbott y Von Doenhoff (1959) mediante la aplicación WebPlotDigitizer (Rohatgi, 2020). En consecuencia, los valores experimentales empleados, además de la propia incertidumbre de medición (no reportada), poseen incertidumbre asociada con el proceso de digitalización de los gráficos y los errores manuales en la identificación de las curvas. La incertidumbre del proceso de digitalización se estima como la mínima división indicada en los ejes de los gráficos a digitalizar. En este caso particular, la mínima resolución distinguible de los gráficos en Abbott y Von Doenhoff (1959) es $\Delta C_l = 0,1$, $\Delta C_{m,c/4} = 0,025$, $\Delta \alpha = 2^\circ$. La incertidumbre asociada con la digitalización de los gráficos se representa en las figuras con una banda gris simétrica alrededor de los valores extraídos. Por lo general, los valores $C_{m,c/4}$ para ángulos de ataque pequeños son mucho menores que la resolución mínima, lo que implica una gran incertidumbre relativa. Por lo tanto, las comparaciones en relación al $C_{m,c/4}$ no pueden considerarse rigurosas.

TABLA 3: CARACTERÍSTICAS DE LOS PERFILES NACA DE CUATRO DÍGITOS ANALIZADOS

Designación	t/c	m/c	p/c
0006	0.06	0.00	0.0
0008	0.08	0.00	0.0
0009	0.09	0.00	0.0
0012	0.12	0.00	0.0
1408	0.08	0.01	0.4
2408	0.08	0.02	0.4

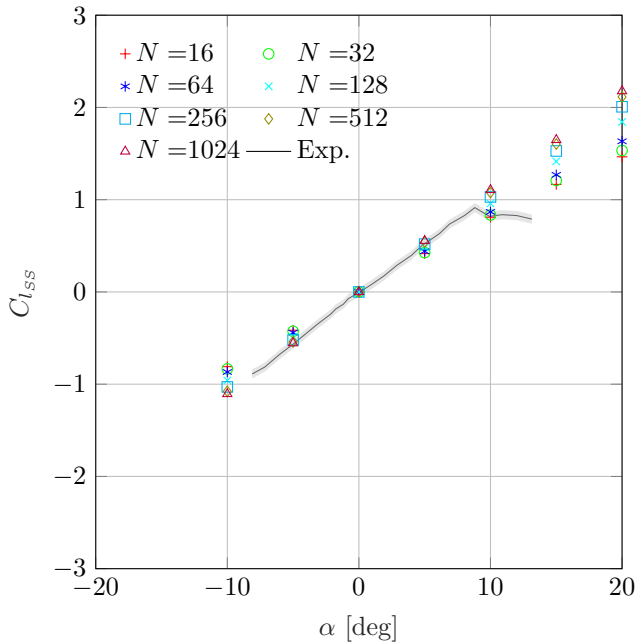


Fig. 7: Coeficiente de sustentación $C_{l_{ss}}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0006. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

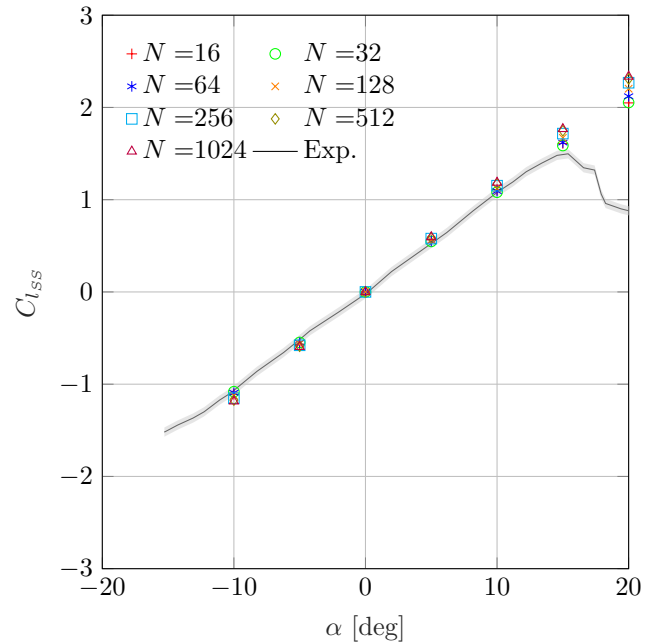


Fig. 9: Coeficiente de sustentación $C_{l_{ss}}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0012. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

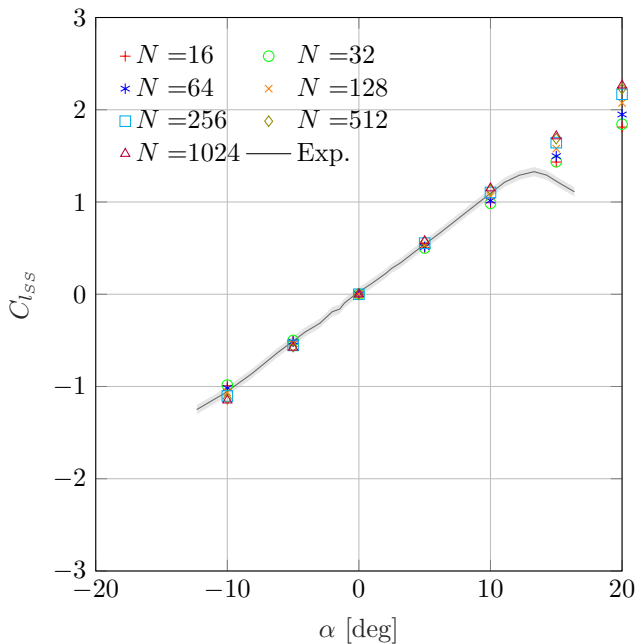


Fig. 8: Coeficiente de sustentación $C_{l_{ss}}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0009. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

La pendiente de sustentación C_{l_α} se estima por medio de una regresión lineal por mínimos cuadrados de los datos experimentales y numéricos comprendidos entre $-5^\circ < \alpha < 5^\circ$. La incertidumbre del C_{l_α} experimental se calcula como el máximo valor del error propagado por la expresión $C_{l_\alpha} \approx (C_l - C_{l_0})/\alpha$. Estos resultados se resumen en la Tabla 4. Se observa que para todos los casos, el valor la pendiente de sustentación estimada aumenta cuando aumenta la cantidad de vórtices N de la discretización. Esto sugiere que en general, la herramienta numérica subestima la pendiente

de sustentación teórica pero converge a este valor conforme se refina la discretización. Si se adopta la discretización con $N = 1024$ como referencia más próxima a la solución teórica, se aprecia que el VLM predice un aumento en la pendiente de sustentación con el aumento del espesor. En contraste, los resultados experimentales sugieren que la pendiente de sustentación de estos perfiles es prácticamente insensible o disminuye levemente con el aumento de espesor. Estas tendencias opuestas son la razón por la que el error de predicción del C_{l_α} aumenta al aumentar el espesor. La discrepancia entre los resultados numéricos y experimentales puede explicarse a partir a los fenómenos de engrosamiento y desprendimiento de la capa límite, mucho más prominentes debido a los mayores gradientes de presión adversos en los perfiles de mayor espesor. Finalmente, se observa que la pendiente de sustentación teórica de estos perfiles es mayor que el valor clásico de 2π para la placa plana, mientras que los valores experimentales son inferiores a dicho valor.

Para evaluar si la tendencia de aumento de la pendiente de sustentación con el espesor predicha por el VLM es correcta, se analiza la correspondiente al perfil Joukowski ya que

TABLA 4: PREDICIONES DE LA PENDIENTE DE SUSTENTACIÓN C_{l_α} EN ESTADO ESTACIONARIO PARA PERFILES NACA SIMÉTRICOS CON DISTINTOS ESPESORES.

N	NACA0006	C_{l_α} NACA0009	NACA0012
Exp.	$(1,92 \pm 0,22)\pi$	$(1,92 \pm 0,22)\pi$	$(1,90 \pm 0,21)\pi$
16	$1,51\pi$ (21%)	$1,85\pi$ (4%)	$2,06\pi$ (9%)
32	$1,56\pi$ (19%)	$1,83\pi$ (5%)	$2,00\pi$ (5%)
64	$1,61\pi$ (16%)	$1,87\pi$ (3%)	$2,01\pi$ (6%)
128	$1,77\pi$ (8%)	$1,95\pi$ (2%)	$2,06\pi$ (9%)
256	$1,89\pi$ (2%)	$2,02\pi$ (5%)	$2,11\pi$ (11%)
512	$1,97\pi$ (3%)	$2,07\pi$ (8%)	$2,15\pi$ (13%)
1024	$2,03\pi$ (5%)	$2,10\pi$ (10%)	$2,17\pi$ (15%)
Jouk.	$2,09\pi$	$2,14\pi$	$2,18\pi$

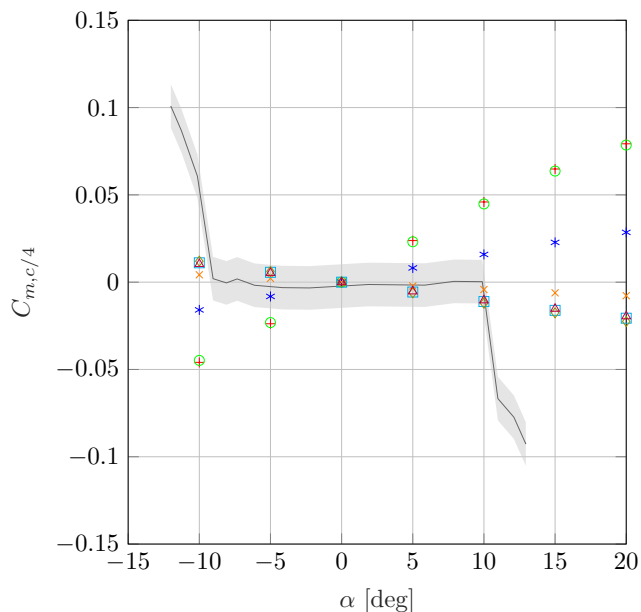


Fig. 10: Coeficiente de momento $C_{m,c/4}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0006. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

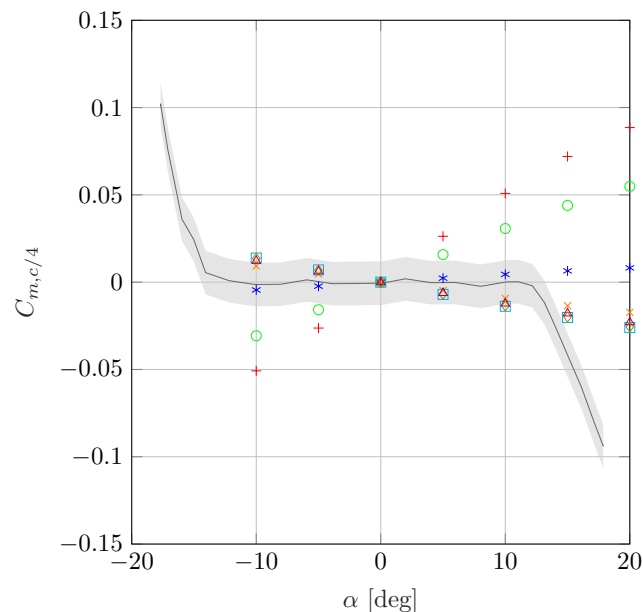


Fig. 11: Coeficiente de momento $C_{m,c/4}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0009. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

su expresión analítica es conocida. El valor teórico del coeficiente de sustentación para el perfil Joukowsky en función del espesor y la curvatura de la línea media se presenta en el Apéndice.

Se puede apreciar en la ec. (38) que la pendiente de sustentación del perfil Joukowsky aumenta con el espesor t/c y es siempre mayor o igual que 2π , tal como predice el VLM para los perfiles NACA. Los valores de la pendiente de sustentación para el perfil Joukowsky con espesores del 6%, 9% y 12% se incluyen en la última fila en la Tabla 4.

En virtud de la exposición anterior, el “extraño” comportamiento del error de predicción de la pendiente de sustentación para $N \leq 128$, que sugiere, por ejemplo que el error es mínimo para el perfil NACA0012 cuando $N = 32$, se debe a la compensación de las dos tendencias contrarias. El VLM subestima la solución teórica que a su vez sobreestima los valores experimentales.

Con respecto al momento $C_{m,c/4}$, se observa que las estimaciones del VLM son muy sensibles a la discretización. Sin embargo, se observa que el método converge aproximadamente a partir de $N = 256$. En general, se concluye que para ángulos de ataque pequeños ($|\alpha| < 5^\circ$) las predicciones de la herramienta numérica están contenidas dentro de la banda de incertidumbre de los resultados experimentales. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, no es posible realizar una comparación rigurosa contra los datos experimentales digitalizados.

Perfiles NACA no simétricos de igual espesor

A continuación, se analizan los perfiles no simétricos NACA1408, NACA2408. Para estos perfiles se emplea el mismo procedimiento de generación de la red de vórtices adherida empleado para los perfiles simétricos. Las mallas obtenidas de este modo fueron consideradas adecuadas ya que la curvatura de la línea media de estos perfiles no es excesiva.

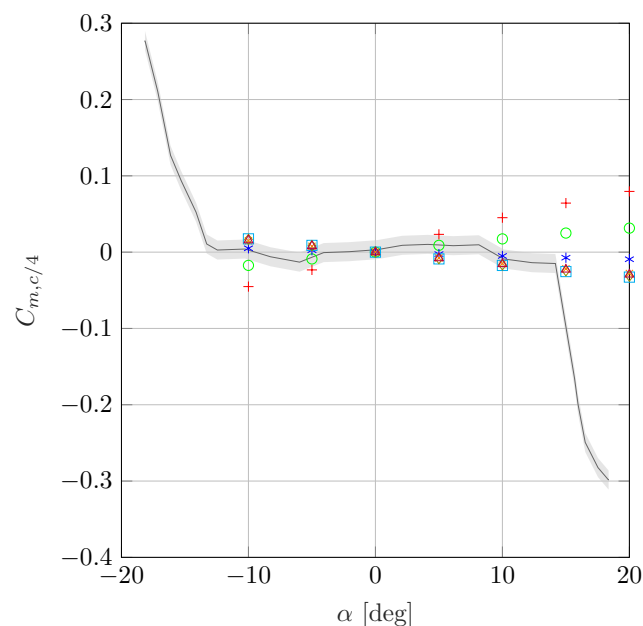


Fig. 12: Coeficiente de momento $C_{m,c/4}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA0012. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

El efecto de la curvatura de la línea media sobre la pendiente de sustentación C_{l_α} y sobre el coeficiente de sustentación para ángulo de ataque nulo C_{l_0} se resume en las Tablas 5 y 6, respectivamente.

Dado que no se dispone de la expresión analítica del C_l para estos perfiles, el efecto teórico de la curvatura sobre el C_{l_0} puede analizarse para el perfil Joukowsky. Los valores del C_{l_0} para el perfil Joukowsky se incluyen en la tabla 6. Se observa en las Tablas 5 y 6 que la estimación de la herramienta computacional del valor de C_{l_0} converge para $N = 256$ a un valor próximo al del perfil Joukowsky. Similarmente al caso de los perfiles simétricos, se observa que la solución teórica

sobrestima los valores experimentales. Si se toman los valores para el perfil Joukowski como los límites superiores, el error máximo del VLM será aproximadamente del 6% y 10% para $C_{l\alpha}$ de los perfiles NACA1408 y NACA2408, respectivamente, y del 30% y 50% para el C_{l0} para los mismos perfiles. Resulta claro que la combadura del perfil tiene un impacto mucho mayor sobre el error de estimación del C_{l0} que sobre la estimación de la pendiente de sustentación. Análogo a lo observado en el caso de los perfiles NACA simétricos, el error en la predicción del $C_{l\alpha}$ y del C_{l0} son mínimos para valores intermedios de N . Por ejemplo, para el perfil NACA 2408, el error en la predicción del $C_{l\alpha}$ es mínimo para $N = 16$. Esto no debe interpretarse como una virtud del del VLM, sino nuevamente como una compensación de efectos opuestos, es decir, la subestimación de una solución teórica que sobrestima los valores experimentales.

La comparación entre las curvas de sustentación $C_{lss}(\alpha)$ y momento experimentales $C_{m,c/4}(\alpha)$ para flujo estacionario y las predicciones del VLM para los perfiles NACA1408 y NACA2408 se presentan en las Figs. 13 a 16. En general, se observa que el método predice correctamente las características de sustentación y momento de estos perfiles. Se observa además una gran sensibilidad de los resultados con el refinamiento de la malla, observándose la convergencia a partir de $N \geq 256$.

Perfil DU97W300

Finalmente, se estudia el perfil aerodinámico DU97W300 empleado en la construcción de las palas de aerogeneradores eólicos. Éste es un perfil de la familia DU, creado en 1997, para aplicaciones de energía eólica (Wind) y con un espesor máximo del 30% de la cuerda. Su gran espesor lo hacen adecuado para “maximizar” la fuerza generada a baja velocidad

TABLA 5: PREDICIONES DE LA PENDIENTE DE SUSTENTACIÓN $C_{l\alpha}$ EN ESTADO ESTACIONARIO PARA PERFILES NACA NO SIMÉTRICOS CON ESPESOR DEL 8%.

N	$C_{l\alpha}$		
	NACA0008	NACA1408	NACA2408
Exp.	—	$(2,01 \pm 0,32)\pi$	$(1,93 \pm 0,31)\pi$
16	$1,77\pi (-)$	$1,82\pi (9\%)$	$1,78\pi (8\%)$
32	$1,69\pi (-)$	$1,70\pi (16\%)$	$1,69\pi (13\%)$
64	$1,78\pi (-)$	$1,78\pi (11\%)$	$1,79\pi (8\%)$
128	$1,92\pi (-)$	$1,92\pi (4\%)$	$1,92\pi (1\%)$
256	$2,01\pi (-)$	$2,01\pi (0\%)$	$2,01\pi (4\%)$
512	$2,07\pi (-)$	$2,07\pi (3\%)$	$2,07\pi (7\%)$
1024	$2,10\pi (-)$	$2,10\pi (4\%)$	$2,10\pi (9\%)$
Jouk.	$2,12\pi$	$2,12\pi$	$2,12\pi$

TABLA 6: PREDICIONES DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN PARA ÁNGULO DE ATAQUE NULO C_{l0} EN ESTADO ESTACIONARIO PARA PERFILES NACA NO SIMÉTRICOS CON ESPESOR DEL 8%.

N	C_{l0}		
	NACA0008	NACA1408	NACA2408
Exp.	—	$0,10 \pm 0,05$	$0,16 \pm 0,05$
16	$0,00 (-)$	$0,11(12\%)$	$0,16(2\%)$
32	$0,00 (-)$	$0,08(21\%)$	$0,16(3\%)$
64	$0,00 (-)$	$0,10(1\%)$	$0,20(22\%)$
128	$0,00 (-)$	$0,11(14\%)$	$0,23(41\%)$
256	$0,00 (-)$	$0,12(20\%)$	$0,24(49\%)$
512	$0,00 (-)$	$0,12(21\%)$	$0,24(50\%)$
1024	$0,00 (-)$	$0,12(19\%)$	$0,24(47\%)$
Jouk.	0.00	0.13	0.27

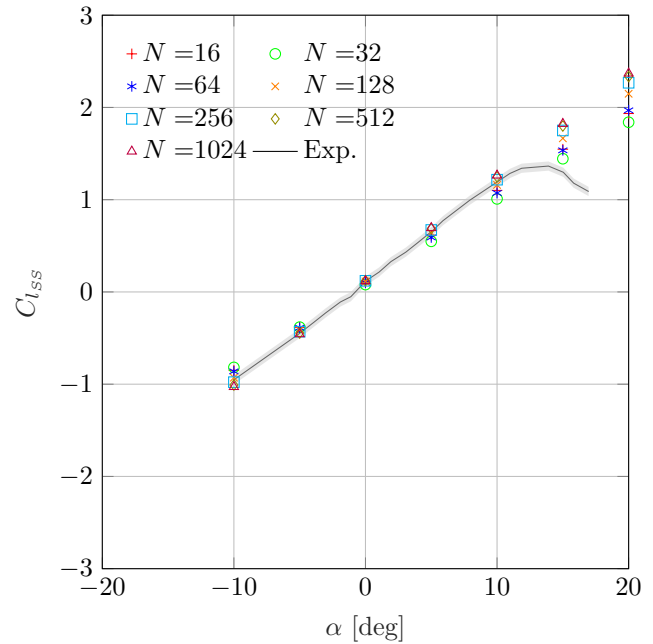


Fig. 13: Coeficiente de sustentación C_{lss} en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA1408. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

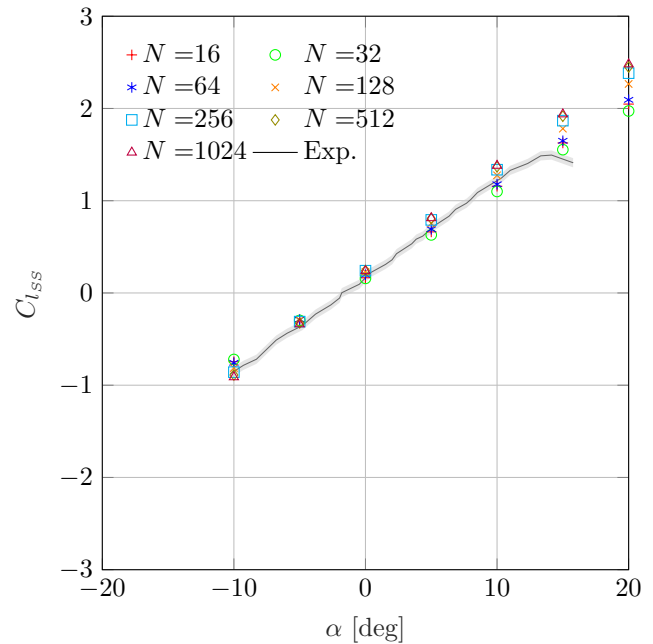


Fig. 14: Coeficiente de sustentación C_{lss} en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA2408. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

(región cercana al eje de rotación) y acomodar la rigidez y material necesarios para soportar las máximas cargas estructurales a que está sometida la raíz de las palas. La geometría de este perfil, así como los datos experimentales fueron obtenidos del material suplementario de Baldacchino et al. (2018).

En este caso, la generación de la red de vórtices puntuales adheridos se realizó de acuerdo a los siguientes pasos: 1) se obtiene una spline interpolante (curva diferenciable definida por partes mediante polinomios, Chapra y Canale (2011))

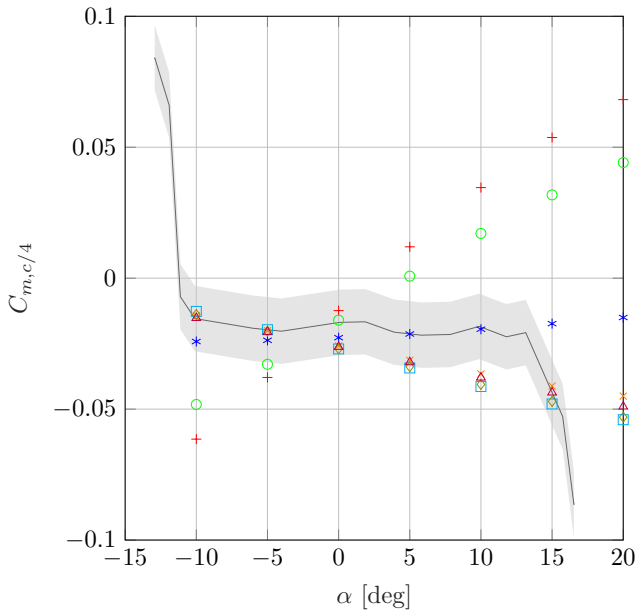


Fig. 15: Coeficiente de momento $C_{m,c/4}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA1408. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

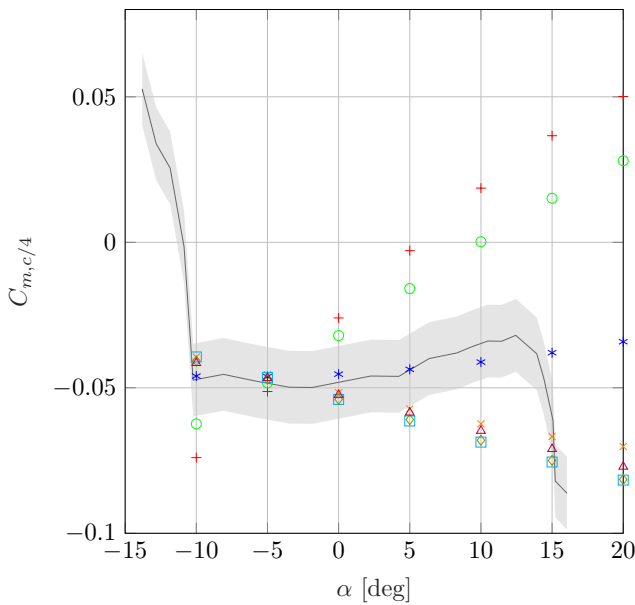


Fig. 16: Coeficiente de momento $C_{m,c/4}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil NACA2408. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

para el extradós e intradós del perfil a partir de las coordenadas de la superficie del perfil. 2) Se aplica el método de discretización empleado anteriormente para los perfiles NACA (Fig. 22).

La comparación entre la curva de sustentación $C_{l_{ss}}(\alpha)$ experimental para flujo estacionario y las predicciones del VLM se presenta en la Fig. 17. Se observa la convergencia del método con el número N de vórtices. Además, la herramienta computacional estima apropiadamente la sustentación de este perfil para ángulos de ataque menores a 5° . Para ángulos de ataque mayores se observa que los resultados numéricos se apartan de los resultados experimentales debido a los efectos de engrosamiento capa de la límite y separación

de flujo desde el borde de fuga. Finalmente, se aprecia en la Tabla 7 que el VLM estima apropiadamente el coeficiente de sustentación para ángulo de ataque nulo C_{l_0} y la pendiente de sustentación C_{l_α} .

En las Figs. 18 y 19 se comparan las predicciones del VLM con las distribuciones de presión experimentales sobre el perfil para ángulos de ataque pequeños de 2.03° , 4.098° . Se observa que las mallas con $N > 256$ vórtices puntuales producen resultados que se aproximan apropiadamente con los resultados experimentales. Se puede apreciar también que la distribución de presión en la región del borde de fuga del perfil es particularmente sensible a la discretización. Esto se atribuye al pequeño espesor del borde de fuga trunco, lo que requiere elementos más pequeños. Para ángulos de ataque mayores, por ejemplo el ángulo de 9.263° analizado en la Fig. 20, se observa que el VLM describe cualitativamente la distribución de presión; sin embargo, las discrepancias entre las predicciones y los resultados experimentales son especialmente pronunciadas en la región del borde de ataque, sobre el extradós del perfil. En la Tabla 8 se resume el error medio cuadrático RMSE de las predicciones con respecto a la distribución teórica de C_p para distintos ángulos de ataque y discretizaciones.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La correcta implementación computacional del VLM fue comprobada mediante la comparación de las soluciones analíticas y las predicciones numéricas de la distribución de presión y las curvas de sustentación y momento para un perfil simétrico van de Vooren con espesor del 15% en flujo estacionario. Los resultados muestran que el método empleado

TABLA 7: PREDICIONES DE LA PENDIENTE DE SUSTENTACIÓN C_{l_α} Y DEL COEFICIENTE DE SUSTENTACIÓN PARA ÁNGULO DE ATAQUE NULO C_{l_0} EN ESTADO ESTACIONARIO PARA EL PERFIL DU97W300

N	C_{l_α}	C_{l_0}
Exp.	$2,24\pi$	0.27
16	$2,51\pi$ (12%)	0.26 (4%)
32	$2,49\pi$ (11%)	0.38 (42%)
64	$2,45\pi$ (10%)	0.38 (40%)
128	$2,44\pi$ (9%)	0.29 (8%)
256	$2,43\pi$ (9%)	0.27 (2%)
512	$2,43\pi$ (9%)	0.25 (8%)
1024	$2,44\pi$ (9%)	0.25 (7%)

TABLA 8: ERROR RMSE DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRESIÓN SOBRE EL PERFIL DU97W300 PARA DISTINTOS ÁNGULOS DE ATAQUE α

N	RMSE(C_p)			
	α			
	-0.035°	2.030°	4.098°	9.263°
16	4.96×10^{-1}	6.22×10^{-1}	7.79×10^{-1}	1.25
32	4.93×10^{-1}	6.05×10^{-1}	7.51×10^{-1}	1.23
64	4.85×10^{-1}	6.09×10^{-1}	7.64×10^{-1}	1.25
128	4.95×10^{-1}	6.29×10^{-1}	7.91×10^{-1}	1.28
256	5.00×10^{-1}	6.36×10^{-1}	7.98×10^{-1}	1.28
512	5.07×10^{-1}	6.44×10^{-1}	8.06×10^{-1}	1.29
1024	5.10×10^{-1}	6.46×10^{-1}	8.08×10^{-1}	1.29

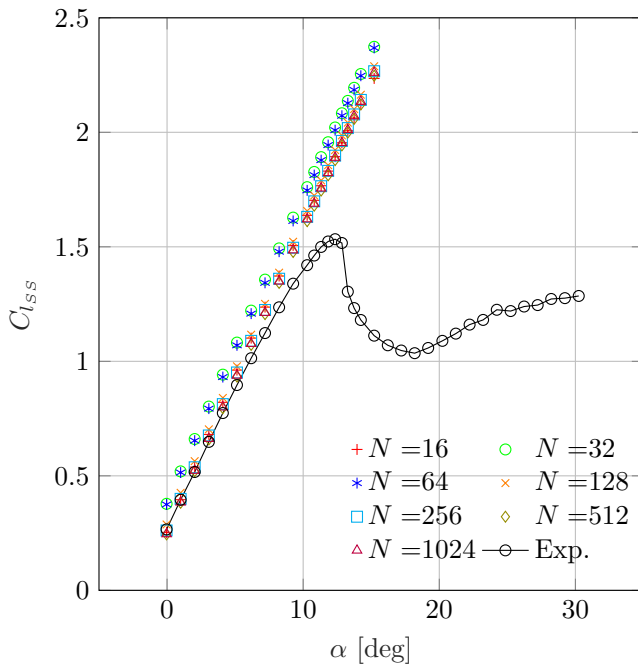


Fig. 17: Coeficiente de sustentación $C_{l_{ss}}$ en función del ángulo de ataque α para el perfil DU97W300. Comparación entre estimaciones numéricas y datos experimentales.

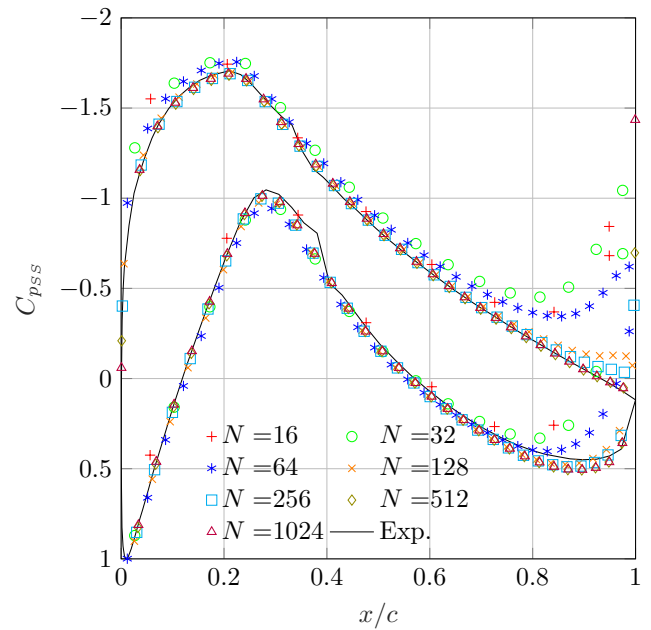


Fig. 19: Convergencia de la distrución de presión (C_p) con el número de vórtices puntuales N para un ángulo de ataque de 4.098°

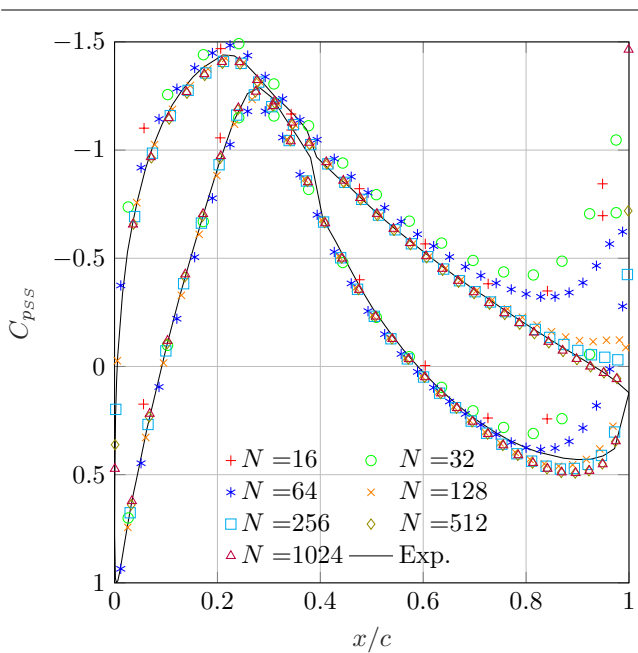


Fig. 18: Convergencia de la distrución de presión (C_p) con el número de vórtices puntuales N para un ángulo de ataque de 2.03°

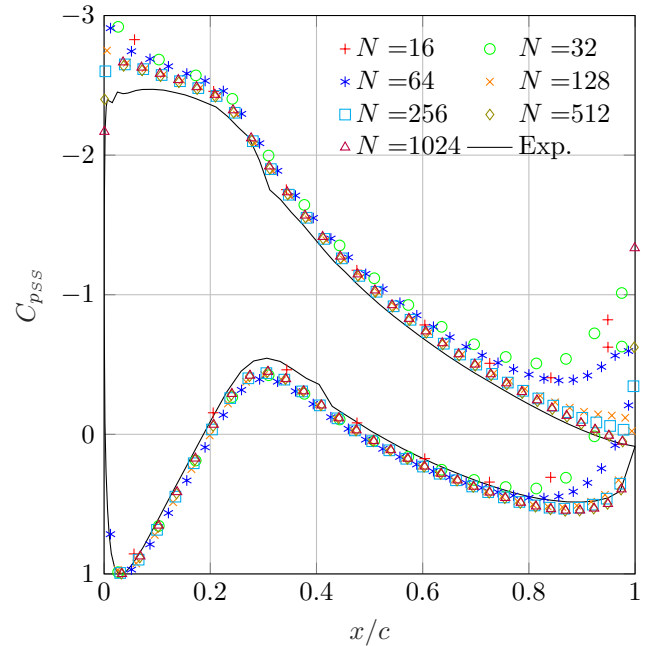


Fig. 20: Convergencia de la distrución de presión (C_p) con el número de vórtices puntuales N para un ángulo de ataque de 9.263°

converge a la solución analítica conforme se refina la discretización de la sábana vorticosa adherida a la superficie del perfil. Se observa, sin embargo, que la discretización, y en particular la densidad de vórtices en la región posterior del perfil cercana al borde de fuga, influye considerablemente sobre el error de estimación de la distribución de presión. Ésto tiene un impacto mucho mayor sobre el cálculo del momento aerodinámico (que requiere al menos 128 vórtices para converger a la solución analítica) que sobre la predicción de la sustentación (que requiere al menos 32 vórtices para lograr un error aceptable). Con este análisis se concluye la correcta

convergencia del VLM a la solución analítica para flujo estacionario. En lo que respecta al flujo no estacionario sobre el mismo perfil van de Vooren, se simuló el flujo producido por un arranque impulsivo. En este caso no estacionario, no se conoce una solución analítica explícita para perfiles no delgados que pueda emplearse para la verificación de la herramienta numérica. Por este motivo se recurre a la función de Wagner, que describe la evolución de la sustentación luego del arranque impulsivo de una placa plana. Se verificó, en primer lugar, que la herramienta predice correctamente el

comportamiento aerodinámico transitorio de la placa plana. Para el perfil van de Vooren, se observó que el valor del coeficiente de sustentación al inicio del movimiento es menor que la mitad del valor estacionario correspondiente, como predice la teoría de Wagner para la placa plana. Este resultado concuerda con estudios previos para otros tipos de perfiles aerodinámicos (Chow y Huang (1982)). Además, el déficit transitorio de sustentación (diferencia relativa con respecto al valor estacionario: $1 - C_l/C_{l_{ss}}$) para el perfil van de Vooren es mayor que el de la placa plana en las instancias iniciales del movimiento, pero se revierte dicha situación luego de una cierta cantidad de cuerdas de desplazamiento del perfil.

En cuanto a los perfiles de las familias NACA y DU, se concluye que no es posible establecer un criterio basado solamente en el espesor y la combadura del perfil para determinar los límites de aplicabilidad del VLM. Esto se debe a que, no sólo esos parámetros son importantes, sino también lo es la geometría del extradós e intradós del perfil en la región de los gradientes adversos de presión. Para los perfiles NACA simétricos de cuatro dígitos, se observa que el error de predicción de la herramienta numérica para la pendiente sustentación alcanza el 15 % para un espesor del 12 % de la cuerda. En contraste, para el perfil DU97W300, cuyo espesor máximo es del 30 % de la cuerda, el error en la estimación de la pendiente de sustentación no supera el 10%. Esto puede ser indicativo de un mejor diseño del extradós del perfil DU97W300 para acomodar de manera más suave el gradiente adverso de presión y prevenir el desprendimiento temprano de flujo en la región anterior al borde de fuga. El VLM predice que la pendiente de sustentación aumenta al aumentar el espesor del perfil. Este comportamiento, si bien es contrapuesto a lo que muestran los valores experimentales, es respaldado por los resultados analíticos para el perfil Joukowski. Esta inconsistencia entre la teoría y los experimentos ponen de manifiesto la importancia de los efectos viscosos en la capa límite que fueron ignorados oportunamente. Resulta imprescindible entonces explorar potenciales mejoras del método aerodinámico empleado incorporando modelos de capa límite. Para los perfiles NACA no simétricos de cuatro dígitos y 8 % de espesor relativo, la herramienta computacional, como así también la teoría, predicen que la pendiente de sustentación no varía con el aumento de la combadura del perfil. Sin embargo, los datos experimentales evidencian una leve disminución de esta pendiente. Esta disminución de la pendiente de sustentación es nuevamente asociada a los efectos viscosos.

Con respecto a la sustentación para ángulo de ataque nulo de los perfiles NACA no simétricos, se observa que el VLM predice correctamente la tendencia de aumento de este valor al aumentar la combadura, pero sobreestima los valores con un error de hasta el 50 %. Se conjetura nuevamente, que estas diferencias son debidas a los efectos viscosos que producen el engrosamiento de la capa límite sobre el extradós del perfil y posiblemente el desprendimiento del flujo antes que el flujo alcance el borde de fuga. Para el perfil DU97W300, cuya combadura de la línea media se desconoce, se observó, por el contrario, que el error de predicción de la sustentación para ángulo de ataque nulo no supera el 10%. Esta observación está alineada con la realizada previamente respecto a la pendiente de sustentación y fundamentada en un diseño más cuidadoso de las regiones de gradientes adversos de presión.

En vistas de la discusión anterior, se concluye que el VLM

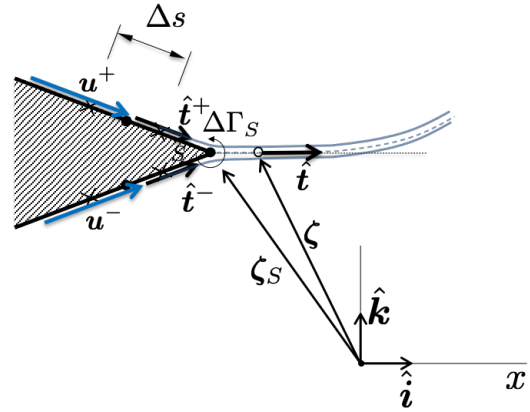


Fig. 21: Representación esquemática del flujo en la región de un punto de separación S.

es adecuado para la predicción de las características aerodinámicas (distribución de presión y los coeficientes aerodinámicos) de perfiles aeronáuticos y de aplicación en turbinas eólicas siempre que no existan gradientes de presión adversos demasiado pronunciados. Esta situación puede presentarse cuando el ángulo de ataque es elevado, por ejemplo, superior a los 10° , o incluso cuando el ángulo de ataque es pequeño para perfiles con espesores moderados pero sin un diseño adecuado de la superficie del extradós.

APÉNDICE

Generación de Vorticidad en los Puntos de Separación

Partiendo de la ec. (3) y luego de algunas manipulaciones algebraicas, se puede demostrar que la diferencia de presión entre las superficies que convergen en un punto de separación de flujo ζ_S está dada por

$$\frac{p(\zeta_S^-, t) - p(\zeta_S^+, t)}{\rho} = \frac{(u_{\text{slip}}^+)^2 - (u_{\text{slip}}^-)^2}{2} - \frac{d\Gamma}{dt} \Big|_{\zeta_S}, \quad (27)$$

donde u_{slip} es la magnitud de la velocidad de deslizamiento entre el fluido y la superficie sólida adyacente $u_{\text{slip}} = \mathbf{u}(\zeta) - \mathbf{v}(\zeta)$, los superíndices + y - se refieren a las superficies “por encima” y “por debajo” del punto de separación, respectivamente, y $d\Gamma/dt$ es la velocidad de generación de circulación en el punto de separación.

Teniendo en cuenta esta expresión, la condición de Kutta que requiere que la presión sea continua en los puntos de separación, implica que la generación de vorticidad desde el punto de separación ζ_S está dada por:

$$\frac{d\Gamma}{dt} \Big|_{\zeta_S} = \frac{(u_{\text{slip}}^+)^2 - (u_{\text{slip}}^-)^2}{2}. \quad (28)$$

Si se considera un punto material en la sábana vorticiosa libre \mathcal{F} , cuyo vector unitario tangente es $\hat{\mathbf{t}}$ (Fig. 21) y su posición es ζ , las velocidades del fluido por “encima” y por “debajo”

de este punto se expresan como sigue:

$$\mathbf{u}^+(\boldsymbol{\zeta}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}, t) + \hat{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\gamma_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\zeta})}{2}, \quad (29)$$

$$\mathbf{u}^-(\boldsymbol{\zeta}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}, t) - \hat{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\zeta}) \frac{\gamma_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\zeta})}{2}. \quad (30)$$

Ahora, es posible demostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(u_{\text{slip}}^+\right)^2 - \left(u_{\text{slip}}^-\right)^2 &= \lim_{\boldsymbol{\zeta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}_S} \|\mathbf{u}^+(\boldsymbol{\zeta}, t) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}_S, t)\|_2^2 \\ &\quad - \lim_{\boldsymbol{\zeta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}_S} \|\mathbf{u}^-(\boldsymbol{\zeta}, t) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}_S, t)\|_2^2 \\ &= 2(\mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}_S, t) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}_S, t)) \cdot \hat{\mathbf{i}}(\boldsymbol{\zeta}_S) \gamma_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\zeta}_S), \end{aligned} \quad (31)$$

donde $\gamma_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\zeta}_S)$ es la intensidad de la sábana vorticiosa libre en el punto de separación dada por la siguiente expresión:

$$\gamma_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\zeta}_S) = \gamma_{\mathcal{B}}^+(\boldsymbol{\zeta}_S) + \gamma_{\mathcal{B}}^-(\boldsymbol{\zeta}_S). \quad (32)$$

Por conservación de masa, es posible mostrar que:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}_S, t) \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}^+(\boldsymbol{\zeta}_S, t) \cdot \hat{\mathbf{i}}^+ + \mathbf{u}^-(\boldsymbol{\zeta}_S, t) \cdot \hat{\mathbf{i}}^- \right).$$

Aproximación del campo de velocidad de las sábanas vorticosas por medio de vórtices puntuales

Se define la extensión compacta $\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}}(x, t)$ en todo eje real $x \in \mathbb{R}$ de la intensidad de la sábana vorticiosa $\gamma_{\mathcal{B}}(s, t)$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}}(x, t) := \begin{cases} 0 & x < 0 \wedge x > \ell \\ \gamma_{\mathcal{B}}(x, t) & 0 < x < \ell. \end{cases} \quad (33)$$

En base a la definición de $\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}}(x, t)$, la ec. (5) puede reescribirse como sigue:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_{\mathcal{B}}(x, t) \hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(x, t))}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(x, t)\|^2} dx. \quad (34)$$

Insertando la ec. (10) en la expresión anterior se obtiene:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^N \Delta\Gamma(s_j, t) \delta(x - s_j) \hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(x, t))}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(x, t)\|^2} dx.$$

Se recuerda que la distribución $\delta(x - x_j)$ tiene la siguiente propiedad:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - s) f(x) dx.$$

Por lo tanto, se obtiene la siguiente aproximación del campo de velocidad asociado a la sábana vorticiosa adherida:

$$\mathbf{u}_{\gamma_{\mathcal{B}}}(\mathbf{r}, t) \sum_{j=1}^N \frac{\Delta\Gamma(s_j, t) \hat{\mathbf{j}} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s_j, t))}{2\pi \|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}(s_j, t)\|^2}. \quad (35)$$

La misma deducción puede realizarse para las sábanas vorticosas libres.

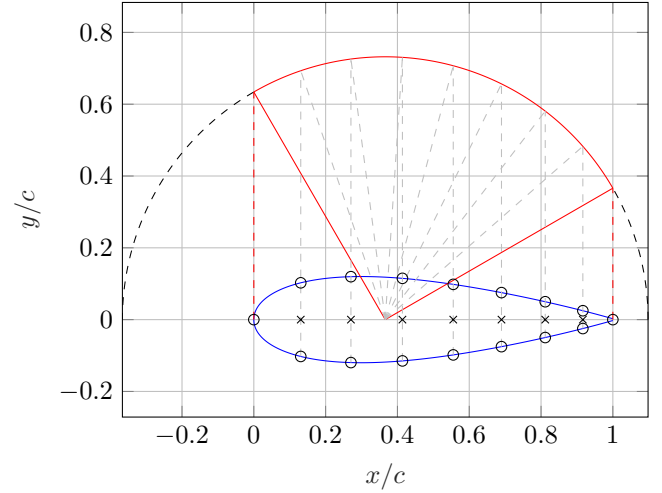


Fig. 22: Representación esquemática del método de discretización de la sábana vorticiosa adherida a la superficie del perfil mediante vórtice puntuales

Estrategia de Discretización de Perfiles NACA Simétricos

Para la generación de la red de vórtices adherida sobre el extradós e intradós de los perfiles NACA, la cuerda del perfil se piensa como la proyección sobre la dirección horizontal de un segmento de círculo delimitado por los ángulos θ_1 y θ_2 . Dicho segmento circular, es dividido en $N/2$ (para N par) segmentos iguales (de igual ángulo barrido $\Delta\theta = 2(\theta_2 - \theta_1)/N$). El esquema de discretización se muestra en la Fig. 22 para el caso de 16 segmentos totales. Las coordenadas horizontales x de los vórtices puntuales sobre la superficie del perfil están dadas por:

$$x_i = x_O + R \cos \theta_i \quad i \leq N/2 + 1, \quad (36)$$

$$x_i = x_O + R \cos \theta_{N+1-i} \quad i > N/2 + 1, \quad (37)$$

donde:

$$\theta_i = \theta_1 + (i - 1) \Delta\theta \quad i \leq N/2 + 1,$$

$$R = \frac{c}{\cos \theta_1 - \cos \theta_2},$$

$$x_O = R \cos \theta_2.$$

Los perfiles NACA poseen un borde de fuga truncado, es decir, el extradós e intradós no convergen a un punto como sucede en el perfil van de Vooren. Para llevar a cabo las simulaciones numéricas, es necesario ubicar un vórtice en el punto de intersección entre la línea media del perfil y la línea que define el borde de fuga truncado. Esto implica que la línea que une el extradós y el intradós en el borde de fuga se divide, al menos, en dos segmentos de recta. La cantidad de segmentos a usar en esta región depende del tamaño de los elementos próximos al borde de fuga, para garantizar la transición uniforme de la discretización desde el intradós.

Perfil Joukowski

La expresión de la pendiente de sustentación para el perfil Joukowski en función del espesor t/c esta dada por (Katz y

Plotkin, 2001, Sección 6.5):

$$Cl_{\alpha_{\text{Jouk}}} = 8\pi \frac{1 + \varepsilon}{3 + 2\varepsilon + \frac{1}{1+2\varepsilon}}, \quad (38)$$

$$\varepsilon \approx \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{t}{c}. \quad (39)$$

Asumiendo que la línea media del perfil es un arco de círculo, el C_{l_0} para el perfil Joukowsky en función de la combadura m está dado por (Katz y Plotkin, 2001, Sección 6.5):

$$C_{l_0} = 8\pi \frac{1 + \varepsilon}{3 + 2\varepsilon + \frac{1}{1+2\varepsilon}} \tan \beta, \quad (40)$$

donde ε está dado por la ec. (39) y

$$\tan \beta = \frac{2m}{c}. \quad (41)$$

REFERENCIAS

- [1] Abbott, I. H. A. y Von Doenhoff, A. E. (1959). *Theory of wing sections, including a summary of airfoil data*. Dover Publications.
- [2] Antman, S. (2005). *Nonlinear Problems of Elasticity*, volumen 107 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer.
- [3] Baldacchino, D., Ferreira, C., Tavernier, D. D., Timmer, W. A., y van Bussel, G. J. W. (2018). "Experimental parameter study for passive vortex generators on a 30% thick airfoil". *Wind Energy*, 21(9):745–765.
- [4] Chapra, S. C. y Canale, R. P. (2011). *Numerical methods for engineers*, volumen 2. Mcgraw-hill New York.
- [5] Chow, C. Y. y Huang, M. K. (1982). "The initial lift and drag of an impulsively started airfoil of finite thickness". *Journal of Fluid Mechanics*, 118:393–409.
- [6] Drela, M. (1989). "Xfoil: An analysis and design system for low reynolds number airfoils". En: *Low Reynolds number aerodynamics*, pp. 1–12. Springer.
- [7] Drela, M. y Giles, M. B. (1987). "Viscous-inviscid analysis of transonic and low reynolds number airfoils". *AIAA journal*, 25(10):1347–1355.
- [8] Graham, J. M. R. (1983). "The lift on an aerofoil in starting flow". *Journal of Fluid Mechanics*, 133:413–425.
- [9] Jacobs, E., Ward, K., y Pinkerton, R. (1935). "The characteristics of 78 related airfoils sections from tests in the variable-density wind tunnel". Reporte técnico N° 460, *National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)*, Washington D.C.
- [10] Katz, J. (2019). "Convergence and accuracy of potential-flow methods". *Journal of Aircraft*, 56(6):2371–2375.
- [11] Katz, J. y Plotkin, A. (2001). *Low-speed aerodynamics*. Cambridge university press.
- [12] Mook, D. T. y Dong, B. (1994). "Perspective: numerical simulations of wakes and blade-vortex interaction". *J. Fluids Eng.*, 116(1):5–21.
- [13] Prandtl, L. y Tietjens, O. G. (1934). *Fundamentals of hydro-and aeromechanics*. Republished by Dover in 1957.
- [14] Pullin, D. I. y Perry, A. E. (1980). "Some flow visualization experiments on the starting vortex". *Journal of Fluid Mechanics*, 97(2):239–255.
- [15] Ramesh, K., Gopalathnam, A., Granlund, K., Ol, M., y Edwards, J. (2014). "Discrete-vortex method with novel shedding criterion for unsteady aerofoil flows with intermittent leading-edge vortex shedding". *Journal of Fluid Mechanics*, 751:500.
- [16] Roesler, B. T. y Epps, B. P. (2018). "Discretization requirements for vortex lattice methods to match unsteady aerodynamics theory". *AIAA Journal*, 56(6):2478–2483.
- [17] Rohatgi, A. (2020). "Webplotdigitizer: Version 4.3".
- [18] Saffman, P. G. (1992). *Vortex dynamics*. Cambridge university press.
- [19] Valdez, M. F., Preidikman, S., y Larsen, S. E. F. (2017). "Análisis aerodinámico de perfiles con múltiples superficies para control y dirección de flujo". *Mecánica Computacional*, 35(26):1517–1539.
- [20] Wagner, H. (1925). "Über die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5(1):17–35.