

# Aerodinámica de Perfiles con Múltiples Superficies de Control de Flujo

Marcelo Federico Valdez<sup>1,2,3</sup>, Sergio Preidikman<sup>1,4</sup> y Silvana Elinor Flores Larsen<sup>1,2</sup>

*1 Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

*2 Instituto de Investigaciones en Energía No Convencional (INENCO)- Universidad Nacional del Salta, Salta, Argentina*

*3 Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Salta, Salta, Argentina*

*4 Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina*

Fecha de recepción del manuscrito: 30/08/2017

Fecha de aceptación del manuscrito: 12/03/2018

Fecha de publicación: 15/03/2018

**Resumen**— La tecnología llamada “morphing” promete un avión que puede reconfigurarse en vuelo, tal como lo hace un pájaro. La aplicación de esta tecnología a la siguiente generación de vehículos aéreos no-tripulados (UAVs) es una alternativa viable y prometedora que les permitirá, además de otras posibilidades, imitar a los pájaros, cambiando la forma de las alas para lograr mayor agilidad de vuelo y así maniobrar entre edificios y estructuras, pasar por debajo de puentes elevados y aterrizar en lugares poco accesibles. En este trabajo se presenta un modelo aerodinámico inestacionario y no-lineal para el análisis de cargas aerodinámicas y del flujo en perfiles aerodinámicos con múltiples superficies de control distribuidas a lo largo del contorno del perfil. La acción de estos elementos de control se asemeja a la de las plumas en las alas de las aves que pueden redireccionar el flujo de aire entre ellas para lograr mayor control, estabilidad y maniobrabilidad. El interés en este tipo de perfiles con múltiples superficies actuadoras es debido a su potencial aplicación en UAVs inteligentes. El modelo aerodinámico empleado para calcular sustentación y para estimar la generación y evolución de las estelas vorticosas, así como su interacción con las superficies sólidas que encuentran en su recorrido, está basado en el método de red de vórtices no-lineal e inestacionario, extensamente empleado en la industria aeronáutica.

**Palabras clave**— Aerodinámica de Multi-Cuerpos, Método de Red de Vórtices Inestacionario, Aeronaves Morphing.

**Abstract**— The morphing technology allows an aircraft to reconfigure during flight, like a bird does. The application of this technology to the next generation of unmanned air vehicles (UAVs) is a feasible and promising alternative that would allow these vehicles, besides other possibilities, to mimic birds by changing the shape of their wings and achieve better agility in flight. This, in turn, would make them capable of maneuvering in between buildings and structures, flying underneath bridges, and landing on places with limited access. In this article, an unsteady, nonlinear aerodynamic model for the analysis of the aerodynamic loads and the flow characteristics over airfoils with multiple control surfaces distributed along the contour is presented. The effect of these control elements is similar to the feathers of bird’s wings that could redirect the flow of air in between them to achieve better control, stability and maneuverability. The interest in this type of airfoils with multiple actuating surfaces is due to its potential application to smart UAVs. The aerodynamic model employed to estimate the lift, and to estimate the generation and development of the vortex wakes, and their interactions with the solid surfaces that they encounter on their path, is based on the nonlinear unsteady vortex lattice method, widely used in the aeronautic industry.

**Keywords**— Multibody Aerodynamics, Unsteady Vortex Lattice Method, Morphing Aircraft

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de conceptos de “morphing” para vehículos aéreos, particularmente para UAVs, es actualmente un tópico muy importante de investigación en el área de las tecnologías aeronáuticas. El objetivo de estas investigaciones es imaginar o prever como serán los diseños aeroespaciales más avanzados dentro de 20 años y

comenzar a desarrollar las tecnologías para que estos se conviertan en realidad.

En este trabajo se introduce una herramienta computacional basada en el método de red de vórtices inestacionario (UVLM por sus siglas en inglés) la cual permite estimar las cargas aerodinámicas y el flujo inestacionario sobre sistemas de múltiples cuerpos inmersos en el seno de un fluido. En particular, en este trabajo, la atención se centra en perfiles aerodinámicos con múltiples superficies actuadoras ubicadas en el intradós y el extradós del perfil asemejándose a las plumas de las aves. Este sistema fue presentado por Blower et al. (2013). El accionamiento de estas superficies produce canales de aire hacia y desde el

Dirección de contacto:

Autor1, INENCO, UNSa, Av. Bolivia 5150, Salta Capital, Salta (A4408FVY), Argentina.

+005403874255578, #####82@gmail.com

interior del perfil en distintas ubicaciones a lo largo del perfil.

En el método de red de vórtices bidimensional, las sábanas vorticosas que aproximan las capas límites sobre los cuerpos y sus estelas en el límite del número de Reynolds aproximándose a infinito, son discretizadas mediante distribuciones discretas de vórtices puntuales. Las circulaciones de estos vórtices se determinan en cada paso de cálculo mediante la imposición de la condición de no penetración en las superficies sólidas y la conservación temporal de la circulación. Conocidas las intensidades de éstos vórtices, el campo de movimiento fluido es conocido y las cargas aerodinámicas sobre los cuerpos pueden ser estimadas mediante la ecuación de Bernoulli inestacionaria.

Un modelo aerodinámico generalizado para estudiar alas multicuerpos bioinspiradas fue presentado por Blower *et al.* (2013). El método presentado por estos investigadores incluye efectos viscosos, pero tiene limitaciones con respecto a la geometría de las estelas de las distintas superficies.

A fin de predecir las cargas aerodinámicas asociadas a la fricción viscosa en las paredes, el método actual puede ser complementado con un modelo de capa límite, por ejemplo, similar al descrito por Blower *et al.* (2013). Esta posibilidad será explorada en futuros trabajos.

El vuelo de las aves se caracteriza por números de Reynolds alcanzando valores del orden de  $10^5$  (Carruthers *et al.* 2010). Para este régimen de vuelo, los efectos viscosos resultan no despreciables y la hipótesis de espesor nulo de las capas límites no es del todo apropiada. En algunas especies de aves, las plumas en la puntera de ala (plumas remeras primarias) son usadas para reducir la resistencia inducida al desplegarse y permitir la redirección de flujo entre ellas. En la zona central y la raíz del ala las plumas remeras secundarias se superponen unas a otras de manera compacta para formar una superficie sustentadora suave.

El modelo de ala multicuerpo estudiado en este trabajo no replica las alas de las aves de manera fehaciente (salvo en las punteras); sin embargo, permite estudiar si el concepto redirección de flujo mediante múltiples superficies puede ser implementado en otras secciones del ala de los vehículos aéreos no tripulados.

## MATERIALES Y MÉTODO

La metodología empleada para estudiar las características aerodinámicas de perfiles multicuerpos esta basada en el método de red de vórtices inestacionario. Detalles sobre el método se pueden encontrar en los trabajos de Preidikman (1998), Valdez *et al.* (2006) y Katz y Plotkin (2001).

El método presentado en este trabajo se basa en la hipótesis de flujo potencial, la cual es aproximadamente válida en la región exterior a las capas límites y las estelas. Además, se asume que las capas límites y las estelas tienen espesor nulo y pueden ser tratadas como discontinuidades (sábanas vorticosas). Esta es una aproximación del flujo para número de Reynolds que tiende a infinito. En consecuencia, el

método no puede predecir esfuerzos de corte (fricción viscosa) sobre las paredes sólidas ni el efecto de difusión viscosa tanto en las estelas como en las capas límites. Como tal, el método no puede predecir el fenómeno de separación de flujo, excepto desde los bordes afilados de los cuerpos. A pesar de estas limitaciones, el método resulta adecuado para la predicción de manera aproximada de la distribución de presión sobre las paredes y las cargas aerodinámicas asociadas a estas.

## Formulación Matemática

En flujos incompresibles y no viscosos (o en flujos con  $Re \rightarrow \infty$ ) el flujo externo a las capas límites viscosas y las estelas de los cuerpos es irrotacional, y en consecuencia existe una función potencial  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  tal que el campo de velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$  y  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

en el dominio fluido infinito  $\Omega$ . En general, un número  $\mathcal{N}_B$  de cuerpos sólidos están inmersos en el seno fluido. Para un cuerpo  $i$  ( $i = 1, \dots, \mathcal{N}_B$ ), el conjunto de puntos interiores al mismo (no incluye la frontera) se denota  $\mathcal{B}_i$  y el conjunto de puntos sobre su superficie exterior se denota  $\partial\mathcal{B}_i$ . Se llama cuerpo  $\bar{\mathcal{B}}_i$  a la clausura de  $\mathcal{B}_i$ . Se definen  $\mathcal{B}$ ,  $\partial\mathcal{B}$ , y  $\bar{\mathcal{B}}$  como el conjunto de todos los puntos interiores de los cuerpos sólidos, el conjunto de todas las superficies sólidas, y el conjunto de cuerpos, respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_B} \mathcal{B}_i \\ \partial\mathcal{B} &:= \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_B} \partial\mathcal{B}_i \\ \bar{\mathcal{B}} &= \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_B} \bar{\mathcal{B}}_i \end{aligned} \quad (2)$$

El dominio fluido  $\Omega$  está limitado por las superficies sólidas  $\partial\mathcal{B}_i$  (ver **Fig. 1**). En un instante dado de tiempo  $t \in [0, \infty)$  el dominio fluido se define formalmente como sigue:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &:= \{\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3 : \mathbf{r} \notin \bar{\mathcal{B}}(t)\} \\ &= \mathbb{E}^3 - \bar{\mathcal{B}}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $\mathbb{E}^3$  denota el espacio vectorial Euclidiano tridimensional (Allen, 2015). La posición de un cuerpo  $\mathcal{B}_i$  en el espacio queda determinada por el vector posición  $\mathbf{r}_{O\mathcal{B}_i} \in \mathcal{B}_i$  de un punto  $O_i$  interior al cuerpo. Su orientación está dada por la orientación del sistema de referencia  $\{\hat{\mathbf{b}}_{1i}, \hat{\mathbf{b}}_{2i}, \hat{\mathbf{b}}_{3i}\}$  respecto del sistema de referencia fijo e inercial  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  (ver **Fig. 1**).

Para los flujos potenciales bajo consideración, el campo de velocidad producido por uno o varios cuerpos inmersos puede ser obtenido como la superposición de soluciones fundamentales de la ecuación (1). Estas soluciones fundamentales presentan singularidades, las cuales son convenientemente distribuidas sobre las superficies sólidas  $\partial\mathcal{B}$  de los cuerpos.

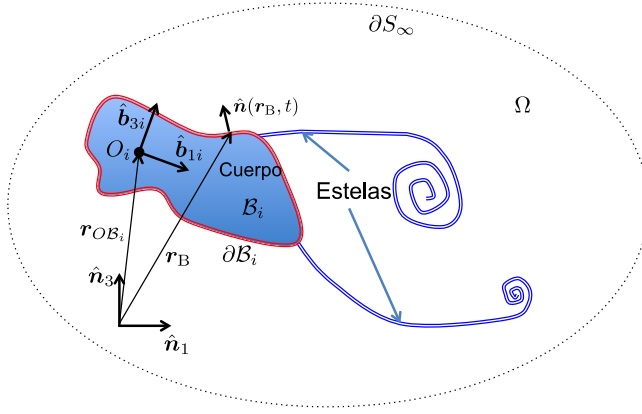


Fig. 1 Definición esquemática del dominio fluido

En el límite  $Re \rightarrow \infty$  las capas límites sobre las superficies sólidas se reducen a sábanas vorticosas. Estas distribuciones continuas de vorticidad de espesor infinitesimal introducen un salto en la componente tangencial de velocidad a través de ellas. Las intensidades de las sábanas vorticosas se determinan en cada instante de tiempo a través de la imposición de la condición de no penetración en las superficies sólidas:

$$(\mathbf{u}(\mathbf{r}_B, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_B, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_B, t) = 0 \quad (4)$$

para todo  $t \in [0, \infty)$ ,  $\mathbf{r}_B \in \partial B$ , donde:  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_B, t)$  es la velocidad absoluta del fluido en el punto  $\mathbf{r}_B$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_B, t)$  es la velocidad de la superficie sólida en el punto  $\mathbf{r}_B$ , y  $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_B, t)$  es el vector unitario normal a la superficie en dicho punto. Además, es necesaria la condición de regularidad en el infinito, la cual requiere que las perturbaciones introducidas por los cuerpos inmersos tiendan a cero a distancias muy grandes de los mismos. Matemáticamente, ésta se expresa como sigue:

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{OB_i}\| \rightarrow \infty \\ i=1, \dots, N_B}} (\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{V}_\infty) = \mathbf{0} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{V}_\infty$  es la velocidad de la corriente libre y  $\|\cdot\|$  representa el módulo o norma Euclidiana.

Debido a que la ecuación (1) no incluye términos y/o derivadas temporales, la dependencia del tiempo del problema se introduce indirectamente mediante la condición de no penetración (ya sea por el movimiento o deformación del cuerpo o por cambios en el flujo). Al no existir derivadas temporales, en flujos incompresibles las condiciones de borde en un instante de tiempo  $t$  se propagan de manera instantánea a todo el dominio fluido. Sin embargo, la forma de las estelas si depende explícitamente de la historia del movimiento y, por lo tanto, es necesario un modelo de estela apropiado.

Las estelas están formadas por partículas fluidas, las cuales transportan vorticidad (circulación). La resolución de las ecuaciones (1), (4), y (5) provee el campo de velocidad  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  para todo  $\mathbf{r} \in \Omega$ . La evolución temporal de una partícula fluida  $P$  en la estela está dada por:

$$\mathbf{V}_P(t) = \frac{d\mathbf{r}_P}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_P, t) \quad (6)$$

donde  $\mathbf{V}_P(t)$  es la velocidad de la partícula  $P$ .

## Método de Red de Vórtices Inestacionario (UVLM)

En la versión bidimensional del UVLM, la vorticidad adherida a las superficies sólidas se discretiza con una colección de  $N$  vórtices puntuales de intensidades  $\Gamma_j$  situados sobre estas superficies. Como consecuencia de esta discretización, la condición de no penetración sólo puede ser garantizada en  $M \leq N$  puntos de control sobre la superficie sólida.

En un punto  $\mathbf{r}_i \in \partial B$ , la componente normal a la superficie sólida de la velocidad del fluido asociada a los todos vórtices puntuales de intensidad  $\Gamma_j$  ubicados en  $\mathbf{r}_j \in \partial B$ , ( $j = 1, \dots, N$ ), está dada por:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Gamma_j \quad (7)$$

donde  $A_{ij}$  se conoce como el coeficiente de influencia de un vórtice  $j$  de intensidad unitaria sobre el punto de control  $i$ . La imposición en cada instante de tiempo de la condición de no penetración (4) en todos los puntos de control, junto con el requerimiento de la conservación temporal de la circulación (condición de Kelvin) conduce a un sistema algebraico de ecuaciones cuyas incógnitas son las circulaciones de los vórtices adheridos a las superficies sólidas como sigue.

$$[A] \{\Gamma_B\} = \{\text{RHS}\} \quad (8)$$

donde  $[A] \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ,  $\{\Gamma_B\} \in \mathbb{R}^N$  es el "vector" de circulaciones de los vórtices adheridos al cuerpo y  $\{\text{RHS}\} \in \mathbb{R}^M$  es el "vector" de contribuciones conocidas de la vorticidad en las estelas, la corriente libre, y del movimiento del cuerpo. Si  $M = N$ , se emplea el algoritmo de descomposición LU para resolver el sistema anterior. Si  $M > N$ , entonces se emplea el algoritmo de factorización QR o LQ que proveen la solución en el sentido de mínimos cuadrados (Anderson et al., 1999).

El campo de velocidad asociado a un vórtice puntual es singular en su centro. Esta singularidad puede acarrear problemas numéricos cuando es necesario calcular la velocidad en un punto muy próximo al vórtice. Para evitar esta singularidad en el campo de velocidades, los métodos de vórtices en general emplean algún método de regularización de variada complejidad (Majda y Bertozzi, 2002).

En este trabajo, se emplean dos tipos de regularización para el campo de velocidades de un vórtice. Para los vórtices adheridos a las superficies sólidas se emplea un parámetro conocido como radio de corte (o cutoff)  $\sigma$  de tal manera que el campo de velocidades en el entorno  $\epsilon(\mathbf{r}_O, \sigma)$  de un vórtice situado en  $\mathbf{r}_O$  es nulo (Katz y Plotkin, 2001, Sección 15.1). Se emplea este método para los vórtices adheridos ya que reproduce a la solución exacta del campo de velocidades de un vórtice puntual en los puntos de control sobre el sólido, siempre y cuando el radio de corte sea menor que la mínima distancia entre un vórtice adherido y el punto de control más cercano. Las componentes en coordenadas cilíndricas del campo de velocidad  $\mathbf{u} = u_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + u_r \hat{\mathbf{e}}_r$  ( $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  y  $\hat{\mathbf{e}}_r$  son los vectores unitarios en la dirección tangencial y radial, respectivamente) de un vórtice

adherido con circulación  $\Gamma$  situado en el punto  $\mathbf{r}_C$  se calculan como sigue:

$$\begin{aligned} u_\theta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_O) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\|} & \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\| \geq \sigma \\ u_\theta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_O) &= 0 & \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\| < \sigma \quad (9) \\ u_r(\mathbf{r}; \mathbf{r}_O) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Para los vórtices libres se emplea la regularización conocida como “vortex blob” o vórtice finito (Barba et al., 2005). Se emplea una distribución Gaussiana de vorticidad cuyo campo de velocidad está dado por:

$$\begin{aligned} v_\theta(\mathbf{r}; \mathbf{r}_O) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\|} \left( 1 - e^{-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\|^2}{2\varepsilon^2}} \right) \\ v_r(\mathbf{r}; \mathbf{r}_O) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $\varepsilon$  esta relacionado con el “ancho” o radio del núcleo del vórtice  $\sigma$  como sigue  $\sigma = \sqrt{2\varepsilon}$ . Para  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_O\| \gtrsim 2.5\sigma$  el campo de velocidad (10) coincide con el del vórtice puntual.

Para las simulaciones presentadas en este trabajo, el parámetro  $\sigma$  se elige como 25 % de la longitud característica de la red de vórtices. Esta longitud característica es el espaciado mínimo entre dos vórtices de la red de vórtices adheridos. Esta longitud garantiza que un punto de control, situado entre dos vórtices sienta la influencia de los dos vórtices adheridos adyacentes.

Un procedimiento similar, empleando de dos métodos de regularización, uno para los vórtices adheridos y otro para los vórtices libres, fue implementado por Xu et al. 2017.

En cada instante de tiempo, vórtices son convectados desde los puntos de separación de flujo (tales como el borde de fuga de un ala) con la velocidad local del flujo. Este proceso de convección desde los bordes afilados de los cuerpos es consistente con el requerimiento de la condición de Kutta, la cual implica que la diferencia de presión en estos puntos debe ser nula y el flujo debe abandonar el borde suavemente con velocidad finita. Una vez convectados, los vórtices que forman las estelas se mueven con la velocidad local del fluido y mantienen su circulación constante.

La condición de Kutta, la cual es necesaria para determinar el valor correcto de la circulación del perfil en los modelos matemáticos *estacionarios* (ya que la condición de Kelvin no permite cerrar el sistema de ecuaciones al no conocerse la circulación total de la estela) se satisface en los bordes de fuga expuestos (no vinculados a otros cuerpos) de cada una de las superficies actuadoras, y en general, en todos los puntos de separación de flujo si hubiera otros (por ejemplo, el borde de ataque).

Para las simulaciones estacionaras directas (distintas de las simulaciones transitorias que tienden al estado estacionario para tiempos largos) la condición de Kutta se impone explícitamente en todos los bordes de fuga expuestos de las superficies de control al requerir que la intensidad  $\Gamma_i$  de los vórtices situados en los bordes de fuga expuestos sea cero.

Para los casos no estacionarios, condición de Kutta no se impone explícitamente, pero se satisface al mover o convectar los vórtices puntuales en el borde de fuga con la velocidad local del fluido en ese punto. La velocidad del fluido en el borde de fuga es finita como lo requiere la

condición de Kutta ya que i) existe un punto de control próximo a borde de fuga (a medio panel de distancia) donde se impone la condición de no penetración y ii) el vórtice ubicado en el borde de fuga no “induce” velocidad sobre sí mismo. Este mecanismo de convección de los vórtices del borde de fuga, junto con el requerimiento de condición de Kelvin de conservación temporal de la circulación determinan que la circulación total alrededor del cuerpo es la correcta. Conforme el sistema alcanza el estado estacionario, se observa que la circulación del vórtice del borde de fuga (y, por ende, la circulación que se incorpora a las estelas) tiende a cero. Esto es consistente con la condición de Kutta estacionaria.

Para avanzar la solución en el tiempo, la posición de un vórtice libre  $P$  se actualiza empleando el método de Euler explícito en la ecuación (6):

$$\mathbf{r}_P(t + \Delta t) = \mathbf{r}_P(t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}_P, t)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (11)$$

### ***Distribución de presiones sobre la superficie de cuerpos inmersos***

Conocidas las circulaciones de todos los vórtices adheridos a las superficies sólidas y las posiciones de los vórtices libres que forman las estelas (cuyas intensidades son conocidas de tiempos anteriores), es posible reconstruir el campo de velocidad en todo el dominio fluido mediante el uso de la ecuación de Biot-Savart. Conocido el campo de velocidad, es posible obtener la distribución de presión  $p(\mathbf{r}_B)$ ,  $\mathbf{r}_B \in \partial\mathcal{B}$  sobre los cuerpos inmersos mediante el uso de la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli como sigue (Valdez et al., 2006):

$$\begin{aligned} \frac{p(\mathbf{r}_B, t) - p_\infty}{\rho} &= \frac{1}{2} \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{V}_\infty \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{r}_B, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_B, t) \\ &+ \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial t} - \frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}_B, t) \\ &+ \mathbf{u}(\mathbf{r}_B, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_B, t) \end{aligned} \quad (12)$$

Donde  $d\Phi/dt$  es la derivada del potencial de velocidades “siguiendo” al punto  $\mathbf{r}_E$  sobre la superficie del cuerpo (Preidikman S., 1998). El subíndice  $\infty$  se refiere a un punto muy alejado del cuerpo donde las perturbaciones del flujo introducidas por el cuerpo son despreciables y en consecuencia  $\partial\Phi_\infty/\partial t \equiv 0$ . Los términos en la ecuación de Bernoulli son fácilmente evaluados. Sin embargo, el término  $d\Phi/dt$  requiere un tratamiento especial para cuerpos cerrados. Las particularidades en la evaluación de la derivada temporal del potencial son discutidas por Valdez et al. (2017).

El UVLM es implementado computacionalmente en un código desarrollado en lenguaje FORTRAN 90 y 2003. Este código fue concebido para estudiar problemas no estacionarios de múltiples cuerpos rígidos inmersos en el fluido. En trabajos futuros, este código computacional será expandido para estudiar problemas de interacción entre el fluido y estructuras con soportes flexibles.

### **VALIDACIÓN**

En primera instancia, se presentará una breve validación del método empleando soluciones analíticas conocidas.

**Perfil Van de Vooren**

Para este trabajo se eligió un perfil Van de Vooren. Este perfil fue seleccionado debido a que el flujo alrededor del mismo posee solución analítica (Katz y Plotkin, 2001) por transformación conforme y debido a que el borde de fuga tiene un ángulo finito, lo cual evita inconvenientes numéricos. La transformación conforme de Van de Vooren está dada por la siguiente expresión

$$Z = \frac{(z - a)^k}{(z - \epsilon a)^{k-1}} + \ell \tag{13}$$

donde  $Z \in \mathbb{C}$  es la variable compleja que describe la geometría del perfil y  $z \in \mathbb{C}$  es la variable compleja que describe una circunferencia de radio  $a$ ;  $k$ ,  $\epsilon$  y  $\ell$  son parámetros que controlan el ángulo del borde de fuga, el espesor y la cuerda del perfil, respectivamente. En este caso, el perfil analizado posee un ángulo de borde de fuga de  $20^\circ$ , un espesor del 15% y una cuerda unitaria. Para ello, los parámetros usados fueron:

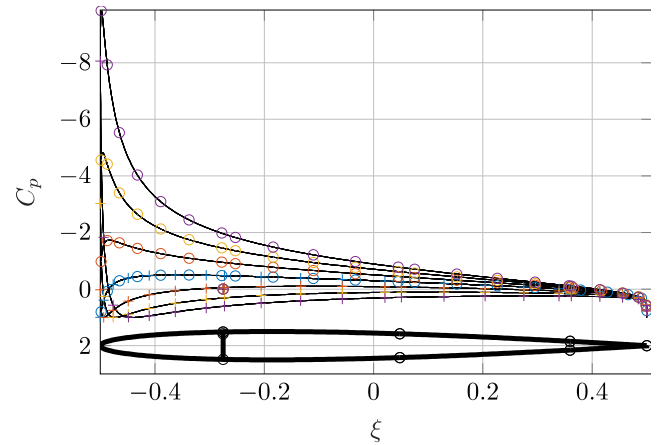
$$\begin{aligned} \ell &= 0.5 \\ k &= \frac{2\pi - \alpha_{LE}}{\pi} = 1.8\epsilon \\ \epsilon &= 0.047216079 \\ a &= 2\ell(1 + \epsilon)^{k-1}2^{-k} = 0.2813 \end{aligned} \tag{14}$$

El contorno del perfil aerodinámico esta compuesto por 7 cuerpos, seis cuerpos son de espesor nulo (Superficies 1 a 6) y uno es un cuerpo cerrado representando el borde de ataque del perfil (LE) como se muestra en la Fig. 6. El experimento numérico tiene como finalidad comprobar el correcto tratamiento de múltiples cuerpos aerodinámicos.

Si bien en este ejemplo todos los cuerpos al ser ensamblados forman el contorno continuo del perfil, el problema presenta dificultades asociadas a la determinación del encadenamiento de estos y la reducción de las ecuaciones a resolver. Por ejemplo, si todos los cuerpos estuvieran separados unos de otros, para cada uno de ellos y sus estelas es necesario satisfacer la conservación de la circulación dada por la condición de Kelvin. Cuando los cuerpos se encadenan, entonces sólo una condición de Kelvin es requerida para la cadena de cuerpos y sus estelas.

Para la discretización de la sábana vorticosa adherida al contorno del perfil se emplean  $N = 2^8$  elementos. En este ejemplo, se considera que el flujo se desprende solamente desde el borde de fuga del perfil. Además, la solución en el estado estacionario se obtiene de manera directa, es decir, en un solo paso de cálculo, asumiendo que la circulación del vórtice situado en el borde de fuga es cero.

La comparación entre las distribuciones de presión  $C_p(\xi)$  analíticas y las obtenidas con el UVLM para el estado estacionario a diferentes ángulos de ataque se muestran en la Fig. 2. La coordenada  $\xi$  es la coordenada local a lo largo de la cuerda del perfil. Como se puede apreciar, las soluciones numéricas a distintos ángulos de ataque se superponen con las soluciones analíticas, demostrando el correcto funcionamiento de la herramienta numérica para este ejemplo.

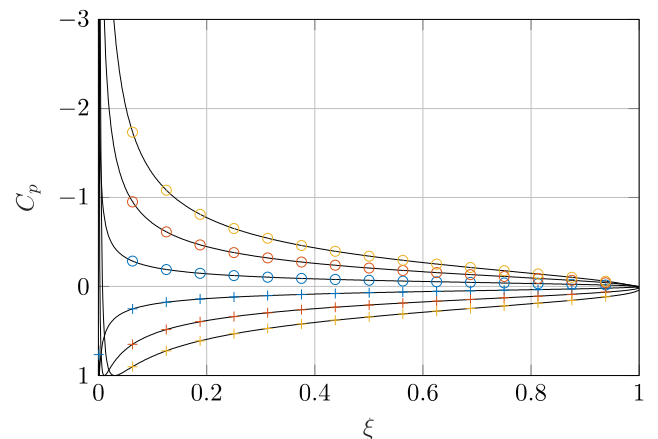


**Fig. 2** Coeficiente de presión ( $C_p$ ) para un perfil Van de Vooren formado por 7 cuerpos y a diferentes ángulos de ataque. Línea negra: Solución analítica; círculos y cruces: distribución de presión sobre extradós y el intradós del perfil, respectivamente; colores azul, rojo, amarillo y violeta: ángulo de ataque de  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $10^\circ$  y  $15^\circ$ , respectivamente.

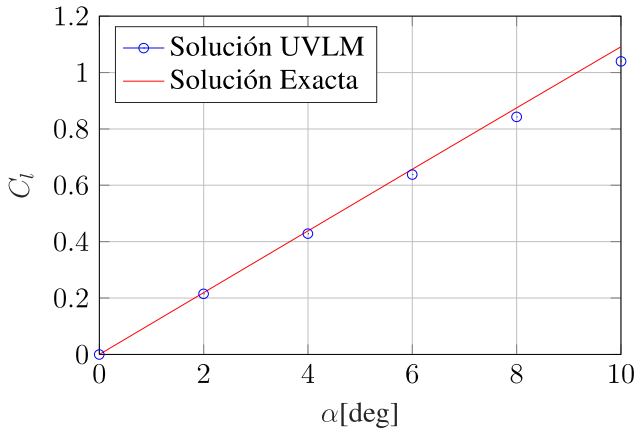
**Flujo potencial alrededor de una placa plana**

En esta sección se comparan las soluciones obtenidas con el UVLM para el flujo potencial alrededor de una placa plana a diferentes ángulos de ataque y las correspondientes soluciones analíticas. Para las simulaciones se emplea un total de  $N = 2^{10}$  elementos ( $N = 2^{10} + 1$  vórtices) distribuidos en una placa plana de cuerda unitaria.

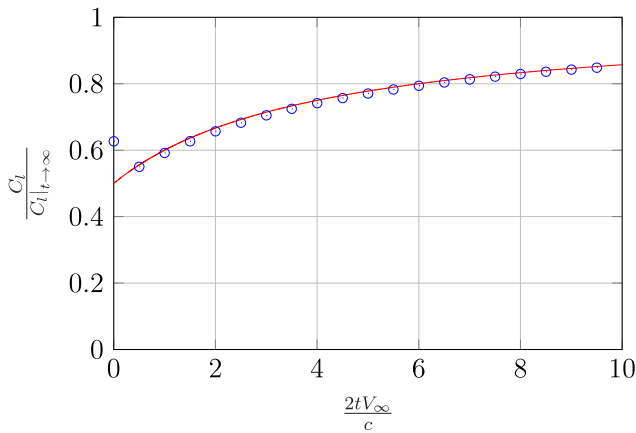
Las distribuciones de presiones estacionarias obtenidas con UVLM se comparan con las expresiones analíticas en la Fig. 3. El coeficiente de sustentación  $C_l$  estacionario en función del ángulo de ataque se compara con la correspondiente solución analítica en la Fig. 4. Se observa que si bien la distribución de presión es reproducida correctamente por el UVLM (excepto en el borde de ataque donde la presión tiende a infinito), el valor calculado del  $C_l$  presenta un error que se incrementa con el ángulo de ataque. Este error está asociado a integración numérica de la distribución de presión a lo largo del contorno de la placa plana ya que esta tiende a un valor infinito en el borde de ataque del perfil.



**Fig. 3:** Coeficiente de presión ( $C_p$ ) estacionario para una placa plana a diferentes ángulos de ataque. Líneas continuas: soluciones analíticas; círculos y cruces: soluciones UVLM sobre las superficies superior e inferior del perfil, respectivamente. Azul, rojo y amarillo: resultados para ángulos de ataque de  $2^\circ$ ,  $6^\circ$  y  $10^\circ$ , respectivamente.



**Fig. 4:** Coeficiente de sustentación ( $C_l$ ) estacionario para una placa plana a diferentes ángulos de ataque. Línea continua: solución analítica; círculos: solución UVLM.

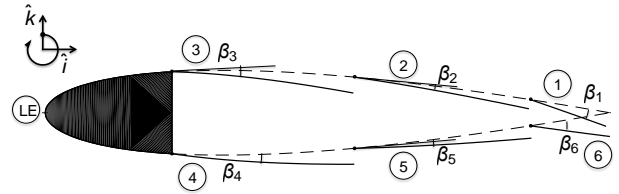


**Fig. 5:** Evolución de la circulación total alrededor de la placa plana con arranque impulsivo. Línea continua: solución analítica (función de Wagner); círculos: solución UVLM.

Finalmente se presentan los resultados no estacionarios para una placa plana de espesor nulo inmersa en un flujo uniforme, el cual inicia impulsivamente. Esto es equivalente al arranque impulsivo de la placa plana en un fluido estático. Para este caso, la solución analítica de la evolución de la sustentación debida a la circulación fue obtenida por Wagner (1925). La comparación entre los resultados obtenidos con el UVLM y la función de Wagner para una placa plana con un ángulo de ataque de  $1^\circ$  se presenta en la Fig. 5. Se observa que las soluciones numéricas correctamente representan la solución analítica.

### ÁNGULOS DE ACCIONAMIENTO DE LAS SUPERFICIES DE CONTROL

La definición de los ángulos positivos de accionamiento de las superficies de control se muestra en la Fig. 6. Estos ángulos  $\beta_i$  se miden desde la tangente al perfil en el punto de articulación. Los ángulos de accionamiento positivos son tales que las superficies ubicadas sobre el extradós del perfil se deflectan hacia el interior de este y las ubicadas en el intradós del perfil se deflectan hacia fuera del mismo.



**Fig. 6:** Definición de la numeración de las superficies de control y de sus ángulos positivos de accionamiento.

## RESULTADOS

A continuación, se presentan los resultados obtenidos con el método de red de vórtices inestacionario para distintos casos de accionamiento de las superficies de control. Los casos estudiados tienen un fin ilustrativo a los efectos de evaluar el desempeño de la herramienta computacional y obtener algunos rasgos cualitativos del accionamiento de superficies de control múltiples.

Para todas las simulaciones presentadas se emplea un total de  $N = 2^8$  vórtices distribuidos a lo largo del contorno exterior del perfil. Se realizan 1500 pasos de cálculo de duración  $\Delta t V_{\infty}/c = 0.00353$ , por lo que el tiempo final de simulación es de  $tV_{\infty}/c = 5.295$ .

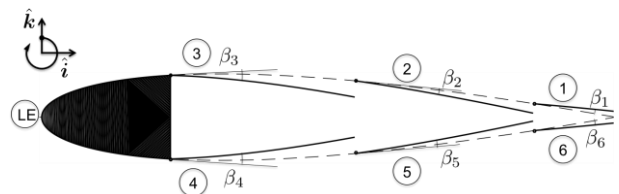
### Caso 1: Accionamiento simétrico de las superficies de control

En este primer caso las superficies de control son accionadas simétricamente como se muestra en la Fig. 7. Para ello, los ángulos usados son:

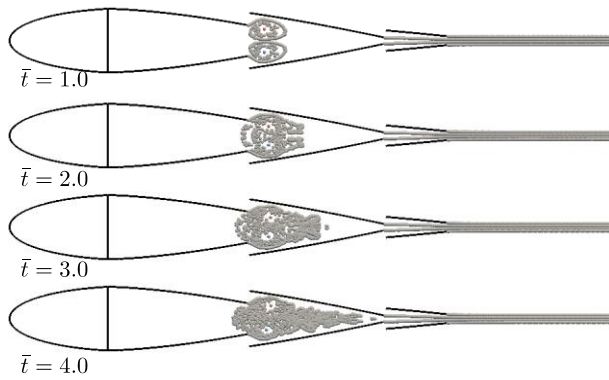
$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\beta_6 = -4^\circ; & \beta_2 &= -\beta_5 = 3^\circ; \\ \beta_3 &= -\beta_4 = 5^\circ \end{aligned} \quad (15)$$

La visualización de las estelas para los ángulos de ataque de  $0^\circ$  y  $15^\circ$  se muestra en la Fig. 8 y Fig. 9, respectivamente. Además, de la interacción de las estelas con las superficies de control corriente abajo, se observa la generación de un área de recirculación de flujo entre la cara posterior del borde de ataque y las superficies 3 y 4. La formación de esta zona de recirculación es atribuida a la baja presión del flujo en la zona posterior al borde de ataque.

La distribución de presión estacionaria a diferentes ángulos de ataque para esta configuración se presenta en la Fig. 10.



**Fig. 7:** Geometría del perfil con accionamiento simétrico de las superficies de control. Línea cortada: perfil original; línea continua: perfil con superficies de control accionadas.

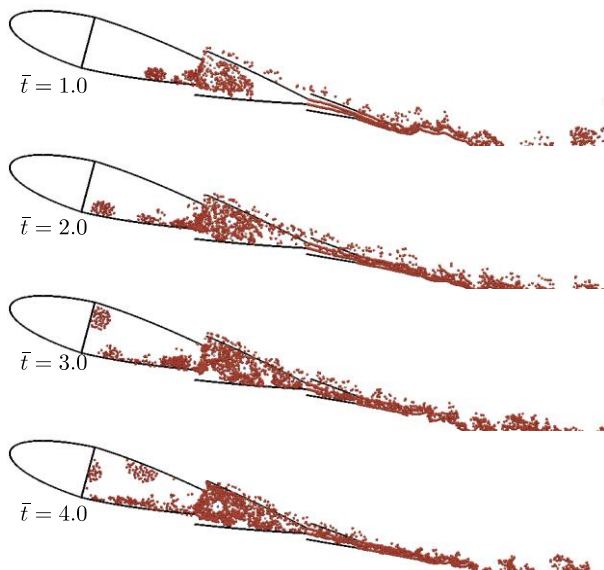


**Fig. 8:** Estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil con accionamiento simétrico de las superficies de control y a un ángulo de ataque de  $0^\circ$ .

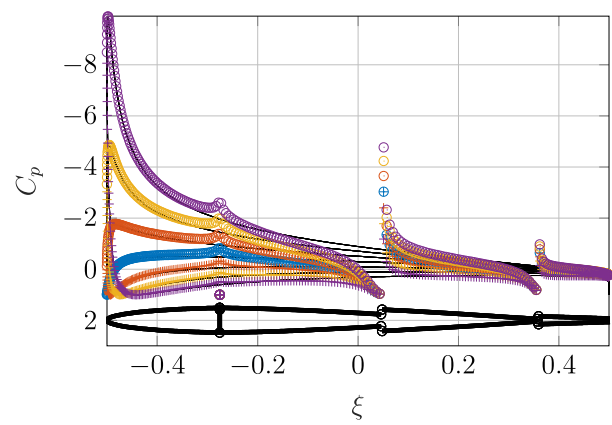
La evolución temporal del coeficiente de sustentación a distintos ángulos de ataque se muestra en la **Fig. 11**. Se observa que la evolución temporal del coeficiente de sustentación presenta fluctuaciones o “ruido” casi imperceptible. El espectro de frecuencia de la señal  $C_l(t)$  obtenido mediante la transformada discreta de Fourier en Matlab® se presenta en la **Fig. 12**. En esta se observa que las frecuencias dominantes son bajas. En base a esta observación, se diseñó un filtro paso-bajo (lowpass) de mínimo orden, con frecuencia normalizada de pasa banda (passband) de  $0,05\pi$  y frecuencia normalizada de corte (stopband) de  $0,1\pi$ . Los resultados filtrados también se muestran en la **Fig. 11**.

Como se observa, esta configuración de las superficies de control no resulta adecuada ya que produce una disminución en la sustentación y, a juzgar por la visualización de las estelas, un aumento de la resistencia. La responsable principal del incremento en la resistencia del perfil es la zona de recirculación de flujo detrás del borde de ataque, la cual está asociada a una zona de baja presión.

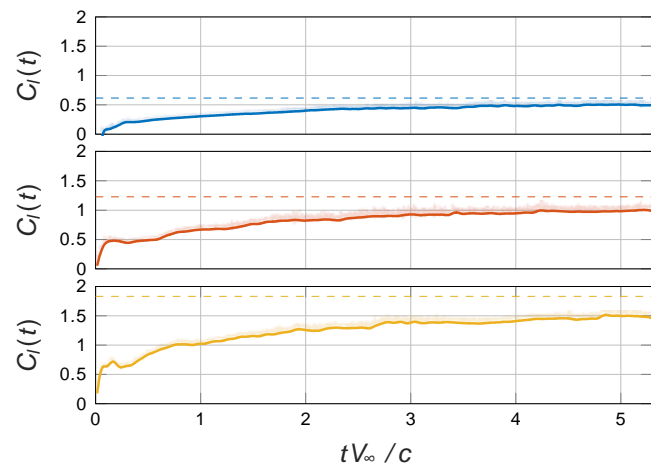
Se observa que esta configuración no produce un canal de flujo eficiente entre las superficies 3 y 4 ya que el flujo recircula en el interior del perfil en lugar de entrar y salir del mismo.



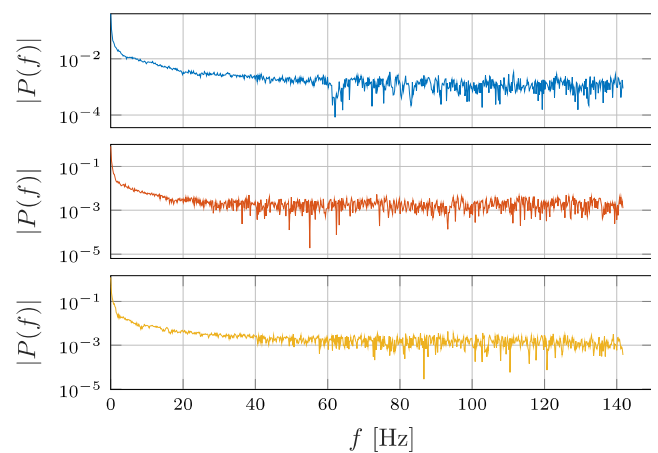
**Fig. 9:** Estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil con accionamiento simétrico de las superficies de control y a un ángulo de ataque de  $15^\circ$ .



**Fig. 10:** Coeficiente de presión  $C_p$  estacionario sobre la superficie exterior del perfil a distintos ángulos de ataque  $\alpha$ . Líneas continuas: soluciones analíticas para el perfil base; círculos y cruces: distribución de presión sobre las superficies superior e inferior del perfil, respectivamente. Azul, rojo, amarillo y violeta: resultados para ángulos de ataque de  $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$  y  $15^\circ$ , respectivamente.



**Fig. 11:** Coeficiente de sustentación  $C_l$  del perfil a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera simétrica. Línea continua: predicción de la herramienta computacional. Línea discontinua: valor teórico estacionario del perfil de Van de Vooren sin superficies de control. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .



**Fig. 12:** Amplitud de la transformada discreta de Fourier de la señal  $C_l(t)$  a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera simétrica. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .

### Caso 2: Accionamiento no simétrico de las superficies de control con deflexión positiva

El segundo caso analizado consiste en el accionamiento asimétrico de las superficies de control usando para todas ellas un ángulo de deflexión positivo como se muestra en la **Fig. 13**. De esta manera, las superficies de control en el extradós del perfil desvían el flujo hacia el interior del mismo. Los ángulos empleados son:

$$\begin{aligned} \beta_1 = 10^\circ; \beta_6 = 17^\circ; \beta_2 = \beta_5 = 3^\circ \\ \beta_3 = \beta_4 = 5^\circ \end{aligned} \quad (16)$$

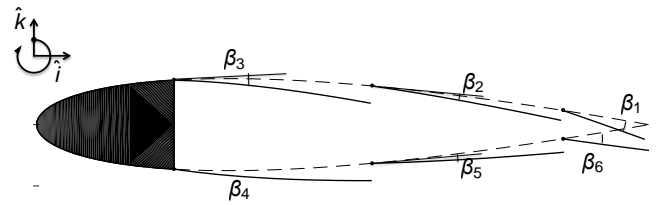
La visualización de las estelas para ángulos de ataque  $0^\circ$  y  $15^\circ$  se muestra en la **Fig. 14** y la **Fig. 15**, respectivamente. Como en el caso anterior, se observa una marcada recirculación del flujo en el volumen definido entre la cara posterior del borde de ataque y las superficies 3 y 4. La condición de flujo descrita es obviamente desfavorable ya que producirá un aumento considerable de la resistencia de forma del perfil. Como en el caso anterior, esta recirculación y estancamiento de flujo se debe a la zona de baja presión generada detrás de la cara posterior del borde de ataque y a la limitación del pasaje de flujo entre la superficie superior y la inferior.

La evolución temporal del coeficiente de sustentación para esta configuración se presenta en la **Fig. 16**. En esta figura se presentan los resultados sin procesar en líneas suaves y los resultados filtrados en líneas gruesas. Como se puede observar, la evolución de la sustentación presenta fluctuaciones de alta frecuencia y gran amplitud, las cuales se hacen más marcadas conforme avanza el tiempo. En un principio, estas fluctuaciones pueden ser atribuidas a la interacción de los vórtices puntuales de las estelas y las superficies de control corriente abajo (ver la sección de Discusión). La viscosidad del fluido (ausente en este modelo) sería, en gran parte, la gran responsable de atenuar estas fluctuaciones ya que suaviza las singularidades.

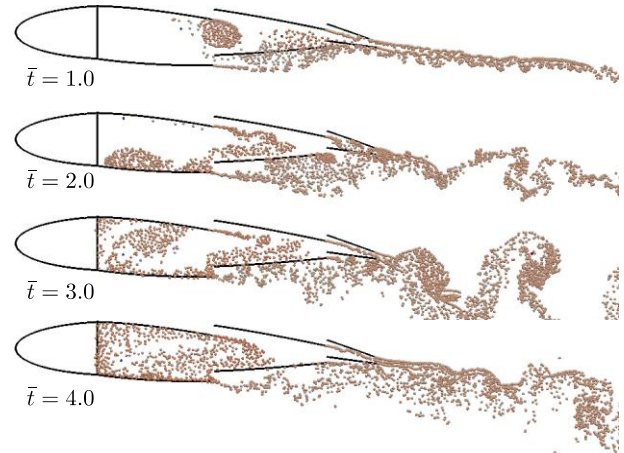
El espectro de frecuencia de la señal  $C_l(t)$  se presenta en la **Fig. 17** donde se observa que los efectos dominantes se encuentran, como en el caso anterior a bajas frecuencias. Se aplicó en este caso el mismo filtro que el empleado en el caso anterior. Los resultados filtrados se presentan en la **Fig. 16**.

Posibles soluciones para suavizar las cargas aerodinámicas en el contexto del método no viscoso es el empleo de una discretización más fina en la superficie del perfil, el empleo de menores pasos de cálculo y por, sobre todo, la introducción de algún método para suavizar o refinar la distribución espacial de vorticidad en las estelas (métodos de splitting). El efecto de la discretización y el refinamiento de la red de vórtices será estudiado en trabajos futuros.

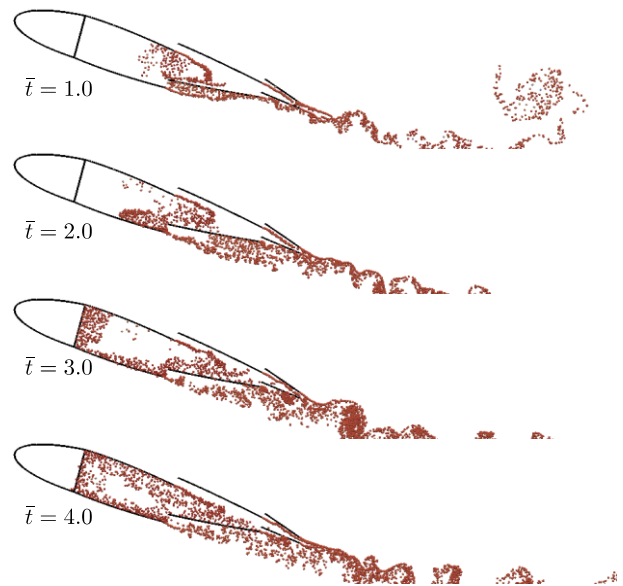
A pesar de las fluctuaciones, se observa que el coeficiente de sustentación tiende a desarrollar un valor medio por encima del valor estacionario sin las superficies accionadas.



**Fig. 13:** Geometría del perfil con accionamiento no simétrico de las superficies de control. Línea cortada: perfil original; línea continua: perfil con superficies de control accionadas.

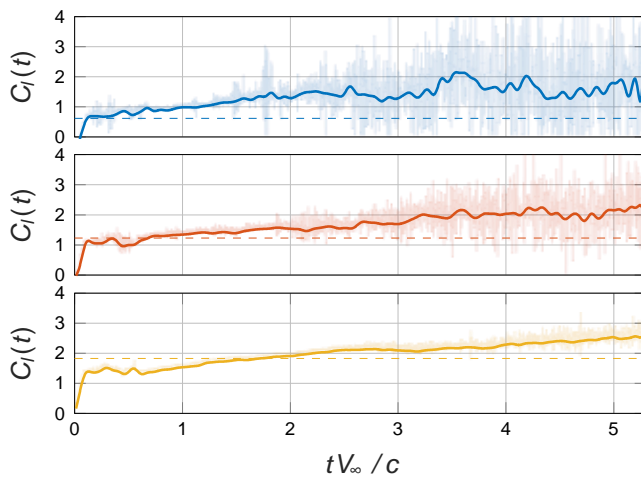


**Fig. 14:** Estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil a un ángulo de ataque de  $0^\circ$  con las superficies de control accionadas asimétricamente con deflexión positiva.

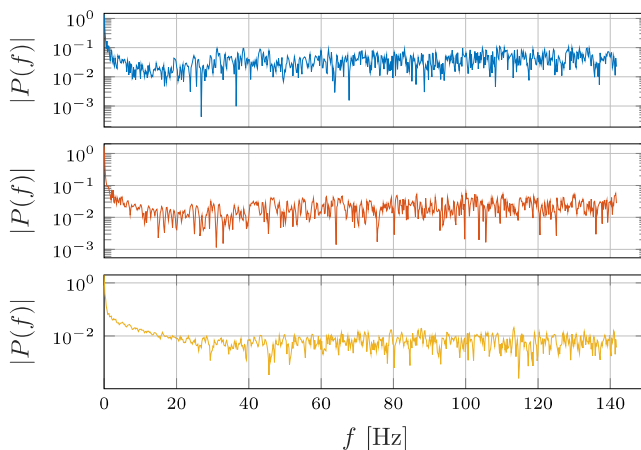


**Fig. 15:** Estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil a un ángulo de ataque de  $15^\circ$  con las superficies de control accionadas asimétricamente con deflexión positiva.





**Fig. 16:** Coeficiente de sustentación  $C_l$  del perfil a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera asimétrica con deflexión positiva. Líneas continuas delgadas: resultados sin filtrar. Línea continua gruesa: resultados filtrados. Líneas discontinuas: valor teórico estacionario del perfil de Van de Vooren sin superficies de control. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .



**Fig. 17:** Amplitud de la transformada discreta de Fourier de la señal  $C_l(t)$  a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera asimétrica con deflexión positiva. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .

**Caso 3: Accionamiento no simétrico de las superficies de control con deflexión negativa**

El tercer caso analizado consiste en el accionamiento no simétrico de las superficies de control usando para todas ellas un ángulo de deflexión negativo como se muestra en la Fig. 18. De esta manera, las superficies de control en el intradós del perfil desvían el flujo hacia el interior del mismo. Los ángulos empleados son:

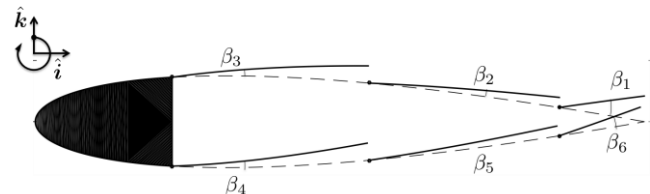
$$\begin{aligned} \beta_1 &= -17^\circ; \beta_6 = -10^\circ \\ \beta_2 &= \beta_5 = -3^\circ; \beta_3 = \beta_4 = -5^\circ \end{aligned} \quad (17)$$

La visualización de las estelas para ángulos de ataque  $0^\circ$  y  $15^\circ$  se muestra en la Fig. 19 y la Fig. 20, respectivamente. Se observa el mismo comportamiento del flujo de los casos anteriores, con recirculación detrás del borde de ataque.

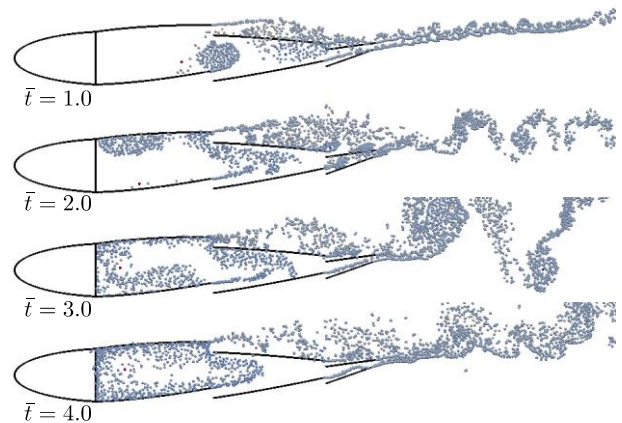
La evolución temporal del coeficiente de sustentación se muestra en la Fig. 21. En este caso, las fluctuaciones en el coeficiente de sustentación son considerablemente más

significativas que en los casos anteriores. El espectro de frecuencia de la señal  $C_l(t)$  se presenta en la Fig. 22 donde se observa que para los ángulos de ataque de  $10^\circ$  y  $15^\circ$ , la señal posee componentes de alta frecuencia. En este caso, se aplicó el mismo filtro que el empleado anteriormente. Los resultados filtrados se muestran en la Fig. 21.

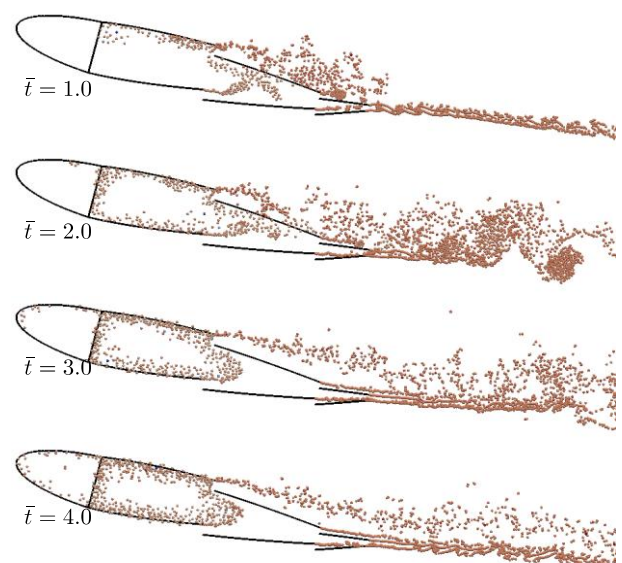
Se observa que la sustentación tiende a valores medios muy inferiores a los valores sin superficies de control.



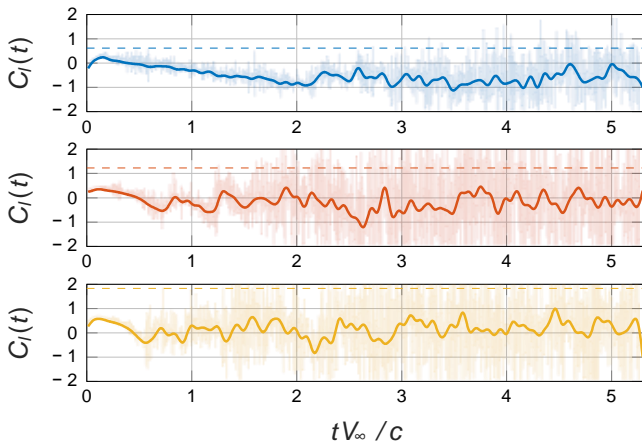
**Fig. 18:** Geometría del perfil con accionamiento no simétrico de las superficies de control. Línea cortada: perfil original; línea continua: perfil con superficies de control accionadas.



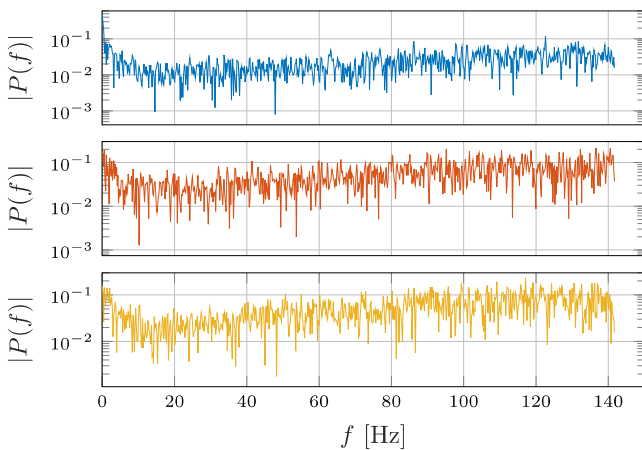
**Fig. 19:** Estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil a un ángulo de ataque de  $0^\circ$  con las superficies de control accionadas asimétricamente con deflexión negativa.



**Fig. 20:** Visualización de las estelas generadas en distintos instantes de tiempo por el perfil a un ángulo de ataque de  $15^\circ$  con las superficies de control accionadas asimétricamente con deflexión negativa.



**Fig. 21:** Coeficiente de sustentación  $C_l$  del perfil a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera asimétrica con deflexión negativa. Líneas continuas delgadas: resultados sin filtrar. Línea continua gruesa: resultados filtrados. Líneas discontinuas valor teórico estacionario del perfil de Van de Vooren sin superficies de control. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .



**Fig. 22:** Amplitud de la transformada discreta de Fourier de la señal  $C_l(t)$  a distintos ángulos de ataque con las superficies de control desplegadas de manera asimétrica con deflexión negativa. Azul:  $\alpha = 5^\circ$ , rojo:  $\alpha = 10^\circ$ , amarillo:  $\alpha = 15^\circ$ .

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una herramienta computacional para el estudio aerodinámico de sistemas de múltiples cuerpos inmersos en el seno de un fluido.

La herramienta computacional desarrollada, la cual está basada en el método de red de vórtices inestacionario (UVLM) fue usada para predecir la sustentación y el flujo generado por un perfil aerodinámico con múltiples superficies de control distribuidas a lo largo del perfil.

Aunque no es posible generalizar en base a los resultados obtenidos en los casos particulares estudiados, éstos nos permiten entender algunos de los efectos producidos por el accionamiento de múltiples superficies de control. En primer lugar, se observó la generación de una zona de estancamiento y recirculación de flujo en la zona posterior al borde de ataque. La formación de este flujo se debe a la zona de baja presión detrás del borde de ataque, la cual adquiere importancia con el accionamiento de las superficies próximas al borde de ataque. Este efecto, el

cual impacta la resistencia del perfil, podría ser evitado mediante un canal o abertura en el borde de ataque de manera de eliminar esta zona de baja presión y permitir el libre flujo de las estelas vorticosas. En segundo lugar, se observa la interacción aerodinámica marcada entre las estelas de las diferentes superficies móviles con las superficies móviles corriente abajo. Esta interacción, debido a su tratamiento mediante el UVLM (empleo de vórtices puntuales con discretización espacial insuficiente, entre otros aspectos) es apuntada como una de las responsables de las grandes fluctuaciones de la sustentación para las configuraciones con las superficies desplegadas.

Sin embargo, resulta necesario un estudio en profundidad del sistema presentado para poder arribar a alguna conclusión respecto al comportamiento aerodinámico del mismo para un amplio rango de configuraciones de las superficies de control. Se prevé que además del accionamiento de las superficies de control de la manera presentada en este trabajo, la introducción de un mecanismo adicional que permita cambiar la curvatura del perfil podría mejorar el comportamiento aerodinámico de este tipo de perfiles multicuerpos.

Un aspecto por mejorar en el método está asociado con las fluctuaciones en las cargas aerodinámicas observadas. La causa específica de estas fluctuaciones es aún desconocida y para determinarla es necesario un estudio más detallado empleando una geometría más simple. Dicho estudio escapa el alcance de este artículo y será abordado en trabajos futuros. Sin embargo, una posible explicación de estas fluctuaciones es la interacción localizada de los vórtices puntuales de las estelas y las superficies sólidas. Cabe recordar que en el UVLM tanto las sabanas vorticosas adheridas como las estelas se discretizan con vórtices puntuales cuyo campo de velocidad es singular en su centro. Además, debido a que la condición de no penetración se satisface sólo en los puntos de control, es posible que partículas de las estelas atraviesen las superficies sólidas de un instante a otro. Para subsanar el problema del campo de velocidad singular, se introduce los métodos de regularización como los descriptos en la sección correspondiente. Para subsanar el segundo inconveniente se requiere la implementación de un algoritmo que prevenga que las partículas de la estela atraviesen las superficies sólidas, el empleo de una discretización adherida mucho más fina, el empleo de un método de suavización de la vorticidad de las estelas, y/o el empleo de un algoritmo de integración temporal de mayor orden. La hipótesis de la conexión entre las fluctuaciones en la sustentación y la interacción estelas-superficies esta fundada en la observación de que una placa plana o el mismo perfil Van de Vooren con una única estela desprendida desde borde de fuga (no interactúa con la superficie sólida una vez desprendida), la historia del coeficiente de sustentación no presenta fluctuaciones (resultados empleados para construir la Fig. 5, por ejemplo).

Las limitaciones del método numérico presentado serán evaluadas en trabajos futuros. Es necesario un análisis detallado de la influencia de la discretización de las sabanas vorticosas, tanto adheridas como libres, sobre las cargas aerodinámicas instantáneas. Asimismo, se estudiará la implementación métodos de integración numérica de orden

superior y de algoritmos que prevengan el pasaje de partículas de la estela a través de los cuerpos sólidos.

## REFERENCIAS

- [1] Allen M.B. (2015) *Continuum Mechanics: The Birthplace of Mathematical Models*. First Edition. Wiley
- [2] Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford L.S., Demmel J., Dongarra J., Du Croz J., Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., et al. (1999). *LAPACK Users' guide*. SIAM
- [3] Barba L., Leonard A., y Allen C. (2005) "Advances in viscous vortex methods—meshless spatial adaption based on radial basis function interpolation". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(5), pp. 387–421.
- [4] Blower, C. J. and Wickenheiser, A. M. (2013). "The validation of a generalized aerodynamic model for multi-body bio-inspired wing". *Proceedings of the ASME 2013 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems (SMASIS2013)*. American Society of Mechanical Engineers, Snowbird, Utah, USA.
- [5] Carruthers A.C., Walker S.M., Thomas A.L.R., and Taylor G. K. (2010) "Aerodynamics of aerofoil sections measured on a free-flying bird". *Proc. IMechE Vol. 224 Part G: J. Aerospace Engineering*, pp. 855–854.
- [6] Katz J. and A. Plotkin A. (2001). *Low-speed aerodynamics*, 2nd Edition. Cambridge University Press, New York.
- [7] Majda A.J. y Bertozzi A.L. (2002) "Vorticity and incompressible flow", Vol. 27. *Cambridge University Press*.
- [8] Preidikman S. (1998). *Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems*. Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.
- [9] Valdez, M., Preidikman S., Massa J. (2006). "Aerodinámica de flujos bidimensionales e inestacionarios dominados por vorticidad". *Mecánica Computacional* Vol. XXV, pp. 2333–2357.
- [10] Valdez, M. F. y Preidikman, S. (2017). "Procedimiento para calcular la distribución de presiones en cuerpos con espesor finito por medio del método de red de vórtices Inestacionario". *VI Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (VI MACI 2017)*. Asociación Argentina de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Comodoro Rivadavia, pp. 440–444.
- [11] Wagner H. (1925) "Über die entstehung des dynamischen auftriebes von tragflügeln". *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 5(1):17–35.
- [12] Xua L., Nitscheb M., Krasny R. (2017) "Computation of the starting vortex flow past a flat plate". *24<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Procedia IUTAM 20 (2017) 136–143.