

# Influencia de la rigidez torsional del chasis en el comportamiento dinámico de un vehículo de la categoría Súper TC 2000

Emmanuel Beltramo<sup>1</sup>, José Stuardi<sup>1</sup> y Guillermo Chiappero<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.

Fecha de recepción del manuscrito: 24/05/2016  
Fecha de aceptación del manuscrito: 17/02/2017  
Fecha de publicación: 15/03/2017

**Resumen**— En términos de desarrollo ingenieril la categoría Súper TC2000 es una de las más importantes del automovilismo en Argentina y es considerada como la más avanzada tecnológicamente en Sudamérica. La estructura de seguridad, típicamente llamada jaula de seguridad, es el componente principal del chasis de este tipo de vehículos. Una adecuada rigidez a la torsión de la jaula permite corregir los fenómenos de subviraje y sobreviraje, mejorando la estabilidad vehicular. Para corregir estos comportamientos no deseados se debe trabajar sobre el fenómeno denominado transferencia lateral de carga. En el presente trabajo se estudian las influencias que poseen la rigidez torsional de la estructura de seguridad y la rigidez de las barras estabilizadoras sobre la transferencia lateral de carga en el tren delantero y el trasero del coche. Se derivan las ecuaciones analíticas que gobiernan un modelo estructural simplificado de la estructura de seguridad y de la suspensión. Para tener en consideración las complejidades asociadas con un vehículo real, se desarrolla un programa informático basado en el método de la rigidez. Esta herramienta computacional permite estimar la adherencia de los neumáticos sobre el terreno para diversas configuraciones del automóvil y condiciones de la pista. Se determina además la magnitud mínima y suficiente de rigidez torsional que debe disponer la jaula de un vehículo de la categoría Súper TC2000. El presente trabajo contribuye a un mayor entendimiento del problema analizado y puede ser utilizado para una mejor y rápida puesta a punto del vehículo en condición de competencia.

**Palabras clave**—Súper TC 2000, Transferencia Lateral de Carga, Estructura de Seguridad, Rigidez Torsional

**Abstract**— In terms of engineering development, Super TC 2000 is one of the most important automobile-racing categories in Argentina and is considered to be the most technologically advanced in South America. The security frame, typically known as roll cage, is the main chassis component in these type of vehicles. As long as the security frame is torsionally stiff, understeer-and-oversteer responses, which are associated with the car stability, can be compensated adequately. These undesired responses can be corrected taking into account the lateral-load-transfer phenomenon. In this work, we study the influences of i) torsional stiffness of the security frame and ii) stiffness of the anti-roll bar, in the distribution of lateral-load transfer between the front and rear axles of the vehicle. We derived the analytical equations that govern a simplified structural model of the roll cage and the vehicle suspension. To take into account the complexities associated with a real vehicle, we developed a dedicated software based on the stiffness method. The computational tool enables the estimation of tire grip for different vehicle configurations and track types. Using an actual roll cage as a case study, we determine the minimum magnitude of torsional stiffness required by the security frame of a Super TC 2000 car. This work contributes to a better understanding of the problem under analysis and can be used for a better and quicker tune up of the vehicle on track.

**Keywords**—Super TC 2000, Lateral Load Transfer, Security Framing, Torsional Stiffness

## INTRODUCCIÓN

El aumento del profesionalismo y de la competitividad han transformado a los equipos de competición en verdaderas empresas; en las que la división de tareas, la especialización y la incorporación de nuevas tecnologías, son fundamentales para alcanzar el éxito en el deporte motor. Lo anteriormente mencionado ha contribuido en la

ejecución de desarrollos complejos y precisos que han permitido ganar décimas de segundo por vuelta, logros de suma importancia en la competencia de automóviles.

Desde los orígenes de la categoría TC 2000 hasta el año 2004, la tarea de los equipos de competición se centraba en construir en el interior de un coche estándar una estructura de seguridad, la cual protegía al piloto ante colisiones e incrementaba la rigidez torsional del chasis del vehículo. En esta concepción, la jaula aporta una rigidez adicional a la provista por el chasis original del automóvil. Luego, una modificación reglamentaria convirtió a la jaula en el componente estructural principal, ya que dejó de ser construida en el interior del vehículo para constituir el propio chasis. Por otro lado, la carrocería dejó de cumplir

Dirección de contacto:

Emmanuel Beltramo, Pueyrredón 149 Córdoba Capital, X5000, Tel.: 3564593124, emabeltramo@gmail.com

una función estructural para pasar a cumplir funciones aerodinámicas, de estética y de marketing. La estructura de seguridad se convirtió de esta forma en el corazón del chasis del automóvil de Súper TC 2000 y por esta razón es un componente que requiere de gran desarrollo (Giancarlo Genta y Lorenzo Morello, 2009). Un diseño preciso y criterioso de la jaula permite corregir actitudes de subviraje y sobreviraje, obteniendo un comportamiento dinámico del coche predecible (Thomas Gillespie, 1992) y (Lane Thomas Borg, 2009).

En este trabajo los términos rigidez torsional del chasis y rigidez torsional de la estructura de seguridad se emplean como sinónimos.

## OBJETIVOS

El presente trabajo tiene como primer objetivo estudiar mediante un modelo estructural simplificado, el fenómeno de transferencia lateral de carga que se presenta en vehículos que transitan una trayectoria curva. Adicionalmente se pretende desarrollar un software interactivo basado en el método de la rigidez, que permita evaluar y tomar decisiones estructurales en el chasis y otros componentes de la suspensión de un coche de Súper TC 2000. Se espera que este programa sea accesible para los ingenieros de la categoría, y que logre viabilizar el cálculo práctico de parámetros geométricos y mecánicos del vehículo. Como aplicación del programa se determina en un caso real la magnitud mínima y suficiente de rigidez torsional de la estructura de seguridad de un coche de Súper TC 2000, además de garantizar una mejor relación peso/potencia y otras optimizaciones.

El presente trabajo ha sido motivado por el desarrollo por parte del primer autor de una Práctica Profesional Supervisada en el equipo Renault Sport de Súper TC 2000 durante el año 2012 (Emmanuel Beltramo, 2015).

## CONCEPTOS PRELIMINARES

A continuación se exponen sucintamente algunos conceptos teóricos que ayudan a comprender la información presentada.

### Sistema de referencia del vehículo

En este trabajo se emplea el sistema de ejes establecido por la SAE que se muestra en la Fig. 1.

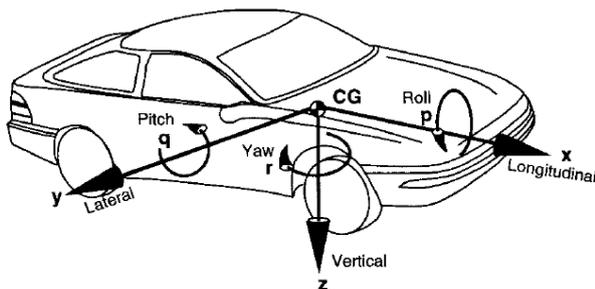


Fig. 1 Sistema de referencia vehicular establecido por la SAE.

Consiste en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales cuyo origen se sitúa en el centro de gravedad

(CG) del automóvil, el eje  $x$  es horizontal y positivo en la dirección de movimiento del coche cuando se mueve en línea recta, el eje  $y$  atraviesa transversalmente al automóvil y su dirección positiva es hacia la derecha del conductor y finalmente el eje  $z$  es perpendicular al plano formado por los dos anteriores y su dirección positiva es hacia abajo, apuntando hacia la superficie de la carretera.

### Carga Lateral Transferida

En la Fig. 2 se observa un esquema de un automóvil en vistas lateral y frontal. Cuando un automóvil describe una trayectoria curva, se desarrolla una aceleración lateral  $a_y$  que da origen a fuerzas de inercia en los componentes másicos del vehículo. Se define como masa suspendida  $m_S$  a aquella que está conformada por el cuerpo del vehículo y es soportada por la suspensión; y como masa no suspendida  $m_N$  a aquella que está constituida por la masa de los neumáticos, llantas, portamasas, componentes de frenos y de suspensión. La masa suspendida  $m_S$  tiende a rotar en torno al eje de rolido, este eje resulta de vincular el centro de rolido del sistema de suspensión delantero  $CR_d$  con el trasero  $CR_t$ . Cada centro de rolido es función de la orientación geométrica de los componentes de suspensión. El momento de rolido  $M_{RS}$  generado por la masa suspendida puede ser calculado como expresa la ec. (1),

$$M_{RS} = m_S a_y (h_{CG} - h_{CR}) \quad (1)$$

donde  $h_{CG}$  es la altura del centro de gravedad y  $h_{CR}$  la altura del centro de rolido  $CR$ . Adicionalmente las fuerzas de inercia asociadas a la masa no suspendida delantera  $m_{Nd}$  y trasera  $m_{Nt}$  actúan en el eje de las ruedas, con un brazo de palanca igual a la diferencia entre el radio de la rueda  $h_{Rd}$  y la altura del centro de rolido  $h_{CRd}$  para el tren delantero, y un brazo de palanca igual a la diferencia entre  $h_{Rt}$  y la altura del centro de rolido  $h_{CRt}$  para el tren trasero. El producto de estas fuerzas por sus correspondientes brazos de palanca da origen al momento de rolido  $M_{RNS}$ , definido por ec. (2).

$$M_{RNS} = m_{Nd} (h_{Rd} - h_{CRd}) + m_{Nt} (h_{Rt} - h_{CRt}) \quad (2)$$

Finalmente el momento de rolido total  $M_R$  se expresa en la ec. (3), y resulta igual a la suma del momento de rolido generado por la masa suspendida y la masa no suspendida.

$$M_R = m_S a_y (h_{CG} - h_{CR}) + m_{Nd} (h_{Rd} - h_{CRd}) + m_{Nt} (h_{Rt} - h_{CRt}) \quad (3)$$

El cálculo de  $M_R$  precedente equivale a trasladar las fuerzas de las masas suspendidas y no suspendidas a los centros de rolido respectivos, en donde no generan desplazamientos angulares. Este traslado origina una masa suspendida delantera  $m_{Sd}$  y una trasera  $m_{St}$ , sus magnitudes dependen de la posición longitudinal del CG. Por otro lado, se define el momento de vuelco  $M_V$  del automóvil como el momento producido por las fuerzas inerciales provenientes de  $m_S$  y  $m_N$  respecto de la superficie de rodadura. Luego, teniendo en cuenta el momento de rolido  $M_R$ ,  $M_V$  se determina como

$$M_V = M_R + (m_{Sd} + m_{Nd}) a_y h_{CRd} + (m_{St} + m_{Nt}) a_y h_{CRt} \quad (4)$$

El momento de vuelco se equilibra mediante un momento o cupla de reacción de las ruedas. Este par produce una pérdida de carga vertical sobre los neumáticos internos a la

trayectoria descrita, y un incremento de carga sobre los neumáticos externos. Dicha fuerza se denomina carga lateral transferida ( $C_T$ ) y el fenómeno asociado que la misma produce, transferencia lateral de carga.

En este trabajo se desprecia efectos no lineales en el incremento del momento debido al desplazamiento lateral del CG. La fuerza normal sobre los neumáticos juega naturalmente un rol fundamental en el comportamiento del vehículo en movimiento, lo que se entiende como comportamiento dinámico, o dinámica del automóvil, (Iñaki Dorronsoro Etxeberria, 2004) y (Juan Alberdi Urbieto, 2003). La estabilidad y maniobrabilidad del vehículo en curvas dependen y se ven seriamente afectadas por el fenómeno de transferencia lateral de carga (W.F. Milliken y D.L. Milliken, 1995), (Reza N. Jazar, 2008) y (Hans Pacejka, 2012).

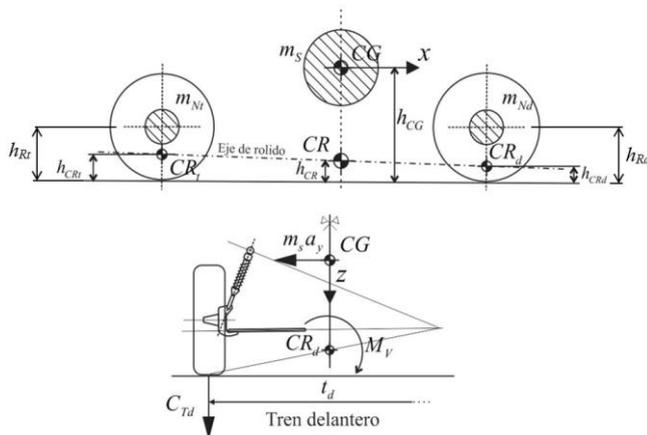


Fig. 2 Transferencia lateral de carga.

**Distribución de Carga Lateral Transferida**

La carga lateral transferida  $C_T$  se distribuye en el tren delantero  $C_{Td}$  y trasero  $C_{Tr}$ . Luego las mismas se calculan como

$$C_{Td} = \frac{M_{Rd}(\theta_d)}{t_d} + (m_{Sd} + m_{Nd}) \frac{a_y h_{CRd}}{t_d} \tag{5}$$

$$C_{Tr} = \frac{M_{Rt}(\theta_t)}{t_t} + (m_{St} + m_{Nt}) \frac{a_y h_{CRt}}{t_t}$$

donde  $t_d$ ,  $t_t$  denotan las trochas delantera y trasera del automóvil respectivamente. El momento de rolido total  $M_R$  se reparte entre tren delantero y trasero, denotando  $M_{Rd}$  a la porción que recibe el tren delantero y  $M_{Rt}$  para el trasero. Nótese que ambas partes son función del ángulo de rolido  $\theta$  de los trenes respectivos. Si la rigidez torsional de la estructura de seguridad es relativamente alta, los ángulos de rolido delantero  $\theta_d$  y trasero  $\theta_t$  resultan idénticos, y el momento se distribuye en función de las rigideces relativas de los sistemas de suspensión. En contraste, si la rigidez de la jaula es comparable con la de los sistemas de suspensión, los ángulos de rolido  $\theta_d$  y  $\theta_t$  resultan distintos, y el momento se distribuye en función de la posición longitudinal del CG. En este último caso las rigideces relativas de los sistemas de suspensión afectan débilmente a la distribución del momento de rolido.

La posición del CG de un automóvil queda definida durante la etapa de diseño, luego su reposicionamiento resulta difícil de llevar a la práctica por requerir una redistribución de los componentes del coche. Por lo tanto, el control de la  $C_T$  se efectúa mediante modificaciones de los elementos elásticos constituyentes del sistema de suspensión delantero y trasero. Dependiendo del tipo de suspensión, es posible modificar la rigidez de los componentes elásticos del sistema y además utilizar barras anti-rolido ó estabilizadoras.

**ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL CHASIS**

El chasis es la estructura que conecta el tren delantero con el tren trasero de un vehículo, y además, ofrece puntos de vinculación para los diferentes sistemas del coche. Un automóvil de Súper TC 2000 posee un chasis tubular, que desde el punto de vista estructural resulta un pórtico tridimensional. La rigidez de la carrocería es despreciable respecto a la rigidez de la estructura de seguridad. Por otro lado, la rigidez flexional de la jaula tampoco se la considera en este trabajo por no afectar en la práctica a la distribución de cargas, ya que la flexión se encuentra desacoplada de la torsión.

Un automóvil cuya jaula disponga una magnitud apropiada de rigidez torsional permite corregir actitudes de sobreviraje y subviraje a través de la regulación de la  $C_T$ . En contraposición, una estructura de seguridad con una rigidez torsional insuficiente ocasiona que la  $C_T$  no sea afectada por la modificación de las rigideces de los componentes elásticos que integran los sistemas de suspensión. Además, una baja rigidez torsional puede ocasionar excesivas deformaciones producto de impactos o colisiones y dañar la integridad física del conductor, o fenómenos de resonancia, propios de frecuencias naturales bajas. La rigidez de una jaula depende estructuralmente de la forma, la orientación de las barras que lo componen, de su geometría y del material.

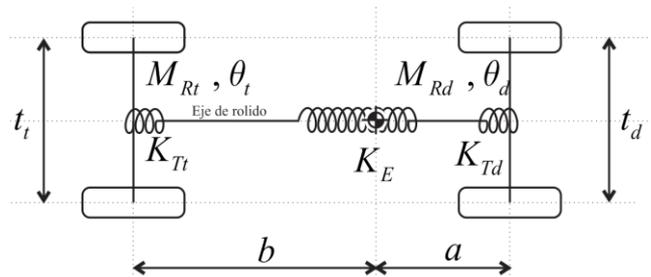


Fig. 3 Modelo vehicular simplificado.

El modelo simplificado de masa concentrada de la Fig. 3 describe el fenómeno de distribución del momento de rolido  $M_R$  a cada uno de los trenes. Los momentos  $M_{Rd}$  y  $M_{Rt}$  aparecen en el primer sumando de los segundos miembros de las ecs. (5). Por otro lado,  $M_R$  puede aproximarse considerando únicamente el momento generado por la masa suspendida. Luego, la ec. (3) se aproxima por medio de la ec. (6).

$$M_R \approx m_s a_y (h_{CG} - h_{CR}) \tag{6}$$

En la Fig. 3,  $K_E$  representa la rigidez torsional de la estructura de seguridad. Adicionalmente  $K_{Td}$  y  $K_{Tt}$

simbolizan la rigidez torsional equivalente del tren delantero y trasero respectivamente. Esta rigidez equivalente resulta de hallar una rigidez torsional que represente a la configuración elástica que constituyen los resortes de suspensión, barra estabilizadora y neumáticos.

Si se considera que el chasis posee propiedades elásticas homogéneas en el eje longitudinal, es posible calcular una rigidez torsional equivalente de la región situada por delante del  $CG$  denominada  $K_d$  y otra rigidez  $K_t$  asociada a la región ubicada por detrás del  $CG$ , según,

$$K_d = \left( \frac{1}{K_{Td}} + \frac{a}{a+b} \frac{1}{K_E} \right)^{-1} \quad (7)$$

$$K_t = \left( \frac{1}{K_{Tt}} + \frac{b}{a+b} \frac{1}{K_E} \right)^{-1}$$

donde  $a$  es la distancia entre el tren delantero y el  $CG$ , y  $b$  la distancia entre el  $CG$  y el tren trasero.  $K_d$  y  $K_t$  se obtienen sumando en serie la rigidez a torsión equivalente del tren (delantero o trasero) con la porción de rigidez a torsión de la jaula que corresponde a la misma región (delantera o trasera), esta última calculada en función de la posición longitudinal del  $CG$ .

El momento de rolo  $M_R$  produce un giro  $\theta$  de la sección transversal del  $CG$  según

$$M_R = (K_d - K_t)\theta \quad (8)$$

Por otro lado, la  $C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$  son proporcionales a la rigidez de los tramos e inversamente proporcionales a las trochas correspondientes, luego las mismas pueden escribirse como

$$C_{Td} = \frac{K_d \theta}{t_d}; C_{Tt} = \frac{K_t \theta}{t_t} \quad (9)$$

Reemplazando la ec. (7) y la ec. (8) en la ec. (9), queda

$$C_{Td} = \frac{M_R}{t_d} \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{K_{Td}} + \frac{a}{a+b} \frac{1}{K_E} \right) \left( \frac{1}{K_{Tt}} + \frac{b}{a+b} \frac{1}{K_E} \right)^{-1}} \quad (10)$$

$$C_{Tt} = \frac{M_R}{t_t} \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{K_{Tt}} + \frac{b}{a+b} \frac{1}{K_E} \right) \left( \frac{1}{K_{Td}} + \frac{a}{a+b} \frac{1}{K_E} \right)^{-1}}$$

o en forma simplificada,

$$C_{Td} = \frac{M_R}{t_d} \frac{K_d}{K_{CG}}; C_{Tt} = \frac{M_R}{t_t} \frac{K_t}{K_{CG}} \quad (11)$$

con

$$K_{CG} = K_d + K_t \quad (12)$$

Observando las ecs. (11) resulta evidente que el momento a rolo se reparte proporcionalmente a las rigideces relativas de los tramos delantero y trasero del automóvil.

### Importancia de la rigidez torsional del chasis

La importancia de la rigidez torsional de la estructura de seguridad  $K_E$  puede fundamentarse mediante un análisis de

la  $C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$  definidas en la ec. (10). Se considera en primer lugar el caso donde  $K_E$  es relativamente pequeña. Si se toma el límite de la ec. (10) cuando  $K_E$  tiende a cero y además se tiene en cuenta la ec. (6) se puede escribir,

$$C_{Td}|_{K_E \rightarrow 0} = \frac{a_y (h_{CG} - h_{CR})}{t_d} \frac{m_s b}{a+b} = \frac{a_y (h_{CG} - h_{CR})}{t_d} m_{Sd} \quad (13)$$

$$C_{Tt}|_{K_E \rightarrow 0} = \frac{a_y (h_{CG} - h_{CR})}{t_t} \frac{m_s a}{a+b} = \frac{a_y (h_{CG} - h_{CR})}{t_t} m_{St}$$

Las ecs. (13) manifiestan que las cargas transferidas se reparten en forma proporcional a sus correspondientes masas suspendidas delantera  $m_{Sd}$  y trasera  $m_{St}$ , como si fuesen trenes totalmente independientes.

En segundo lugar, se considera un valor de la rigidez  $K_E$  relativamente elevado, de tal manera que si se calcula el límite de la ec. (10) cuando  $K_E$  tiende a infinito, resulta

$$C_{Td}|_{K_E \rightarrow \infty} = \frac{M_R}{t_d} \frac{K_{Td}}{K_{Td} + K_{Tt}} \quad (14)$$

$$C_{Tt}|_{K_E \rightarrow \infty} = \frac{M_R}{t_t} \frac{K_{Tt}}{K_{Td} + K_{Tt}}$$

En este caso las cargas transferidas se reparten en proporción directa a la rigideces de sus respectivos trenes e independientemente de la posición del  $CG$ .

Lo que se expone anteriormente permite un control de la  $C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$  por medio de la modificación de la rigidez de los elementos elásticos constitutivos de los sistemas de suspensión, esto es  $K_{Td}$  y  $K_{Tt}$ , siempre que la rigidez de la jaula  $K_E$  sea suficiente elevada. Nótese además que la  $C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$  convergen a valores constantes para magnitudes suficientemente elevadas de  $K_E$ , ya que las ecs. (10) se independizan de  $K_E$ , como se observa en las ecs. (14).

A continuación se presentan los siguientes parámetros adimensionales

$$\alpha = \frac{K_E}{K_{Td}}; \gamma = \frac{K_{Td}}{K_{Tt}}; \beta = \frac{a}{b} \quad (15)$$

Además, las cargas transferidas se adimensionalizan del siguiente modo

$$R_d = \frac{C_{Td}}{C_T}; R_t = \frac{C_{Tt}}{C_T} \quad (16)$$

donde  $R_d$  y  $R_t$  se denominan relación de transferencia delantera y trasera respectivamente. Finalmente, admitiendo que para la mayoría de los casos prácticos  $t_d \approx t_t \approx t$  queda,

$$R_d = \frac{1}{1 + \left( 1 + \frac{\alpha^{-1}}{1 + \beta^{-1}} \right) \left( \gamma + \frac{\alpha^{-1}}{1 + \beta} \right)^{-1}} \quad (17)$$

$$R_t = \frac{1}{1 + \left( 1 + \frac{\alpha^{-1}}{1 + \beta^{-1}} \right)^{-1} \left( \gamma + \frac{\alpha^{-1}}{1 + \beta} \right)}$$

La Fig. 4 muestra la  $R_d$  en función de  $\alpha$ , y con variación de  $\gamma$  en forma paramétrica. El gráfico a) corresponde a  $\beta=0,67$  y el gráfico b) a  $\beta=1,5$ , los cuales representan las condiciones de un  $CG$  adelantado y retrasado

respectivamente. La Fig. 5 exhibe la variación de  $R_t$  para idénticas condiciones.

Si se consideran las rigideces de los trenes como constantes, cada curva de los gráficos representa la relación de transferencia en función de la rigidez torsional de la jaula  $K_E$ . Del análisis se concluye que las relaciones de transferencia dependen de las relaciones entre los parámetros y no de sus valores absolutos. Además se verifica que el parámetro adimensional  $\beta$  tiene influencia sobre  $R_d$  y  $R_t$  para valores bajos de  $\alpha$ , mientras que para valores elevados de  $\alpha$ , el parámetro adimensional gobernante es  $\gamma$ . En efecto, cuando  $\alpha$  tiende a cero:

$$R_d|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{1}{1 + \beta}; R_t|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{\beta}{1 + \beta}; \left. \frac{R_d}{R_t} \right|_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{1}{\beta} \quad (18)$$

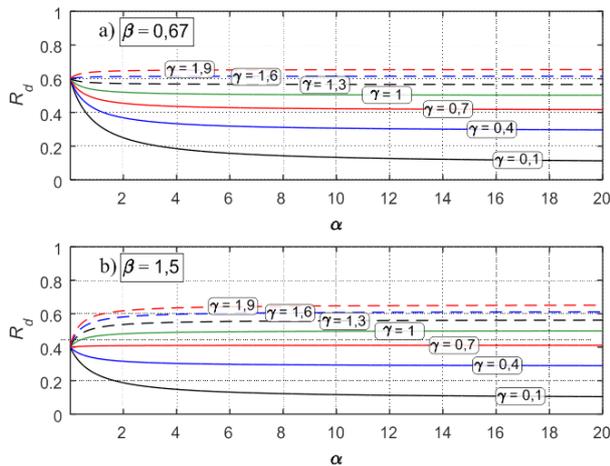


Fig. 4 Relación de transferencia delantera  $R_d$ , a)  $\beta=0,67$ , b)  $\beta=1,5$ .

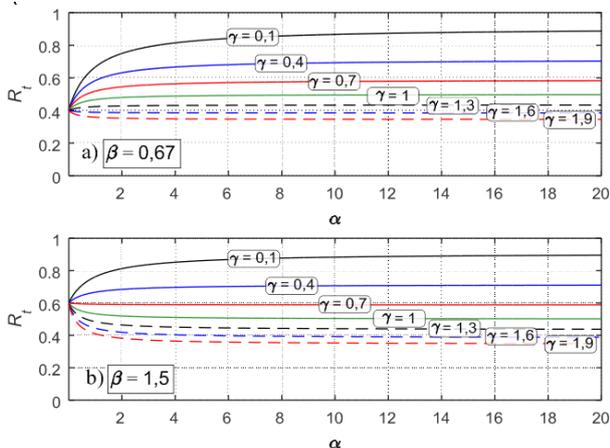


Fig. 5 Relación de transferencia trasera  $R_t$ , a)  $\beta=0,67$ , b)  $\beta=1,5$ .

La ec. (18) es la versión adimensional de la ec. (13). Por otro lado, cuando  $\alpha$  tiende a infinito tenemos la versión adimensional de la ec. (14),

$$R_d|_{\alpha \rightarrow \infty} = \frac{\gamma}{1 + \gamma}; R_t|_{\alpha \rightarrow \infty} = \frac{1}{1 + \gamma}; \left. \frac{R_d}{R_t} \right|_{\alpha \rightarrow \infty} = \gamma \quad (19)$$

De la relación entre la  $R_d$  y la  $R_t$  para  $\alpha=0$  puede concluirse que, si  $\beta < 1$  (el CG se encuentra adelantado)  $R_d > R_t$  y viceversa (ec. (18)).

Interesa analizar la intersección de las curvas de  $R_d$  y  $R_t$  en función de los parámetros adimensionales, para ello se

igualamos  $R_d$  con  $R_t$  en la ec. (17), de tal manera de obtener el valor de  $\alpha_c$  como,

$$\alpha_c = \frac{1 - \beta^{-1}}{1 + \beta^{-1}} \frac{1}{\gamma - 1} \quad (20)$$

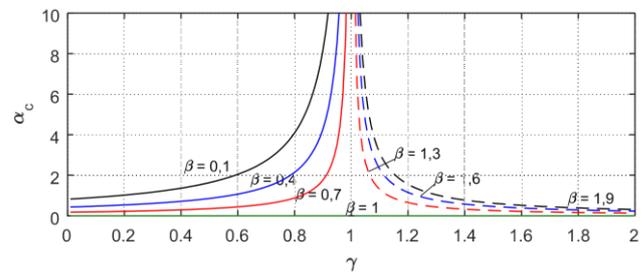


Fig. 6 Parámetro  $\alpha_c$  en función del parámetro  $\gamma$  para diferentes valores de  $\beta$

En la Fig. 6 se grafica la ec. (20) en función de  $\gamma$  y se toma a  $\beta$  como parámetro variable. Si se considera nuevamente el caso  $\beta < 1$ , se consigue que  $R_d$  tome el mismo valor que  $R_t$  sólo para valores de  $\gamma < 1$  (tren trasero más rígido que el delantero), y viceversa, es decir para el caso  $\beta > 1$  es posible equilibrar las transferencias si  $\gamma > 1$ , caso contrario la relación de transferencia delantera y trasera profundizarán sus diferencias, aumentando la mayor y disminuyendo la menor. Finalmente para el caso  $\gamma \approx 1$  tanto  $R_d$  como  $R_t$  tienden a 0,5 para valores elevados de  $\alpha$ , e independientemente del valor de  $\beta$ .

### SIMUDINAMIC

El programa SimuDinamic ha sido desarrollado con el objetivo de analizar en forma precisa la estructura de seguridad y las suspensiones de un automóvil de la categoría Súper TC2000. Está disponible como versión portable del entorno Matlab.

### Descripción del programa: ventajas, desventajas y usos

SimuDinamic puede emplearse tanto en la etapa de diseño como en la puesta a punto del automóvil en condiciones operativas. Durante el diseño presenta utilidad para estudiar la rigidez torsional del chasis, constituyendo además una herramienta valiosa para alcanzar la performance dinámica deseada. Permite calcular la adherencia final de los neumáticos teniendo en cuenta la carga aerodinámica, la transferencia longitudinal y lateral de carga. Además verifica la condición de estabilidad y derrape de los neumáticos en cada instante del recorrido. Admite para esto la lectura de archivos provenientes de la instrumentación a bordo del automóvil, tales como aceleraciones y velocidades longitudinales y transversales.

El programa presenta un nivel de precisión superior respecto al modelo analítico presentado, ya que este último adolece de aproximaciones tal como la utilización de masas concentradas, imposibilidad de considerar correctamente los términos que constituyen el momento de vuelco y la representación de la jaula como una viga de propiedades constantes, entre otras. Como SimuDinamic fue pensado para automóviles de la categoría Súper TC 2000, los sistemas de suspensión del coche se encuentran definidos en

su tipo, y no permiten ser modificados. El sistema de suspensión delantero es independiente del tipo paralelogramo deformable, y el trasero es un sistema dependiente de eje rígido. Por otro lado, el usuario no posee ningún tipo de restricción geométrica en la definición de la estructura de seguridad.

SimuDinamic permite modelar un chasis vehicular del tipo jaula. Incorpora juntas articuladas que se encuentran en la conexión de los sistemas de suspensión a la estructura de seguridad. El problema estructural se resuelve utilizando elementos de barras y por medio del método de la rigidez (José Luis Blanco Claraco *et al.*, 2012), efectuando una condensación estática de los grados de libertad a los que se les otorga libertad de giro o desplazamiento a nivel de nudos (M. Asghar Bhatti, 2005) y (Young W. Kwon y Hyochoong Bang, 1997). Desde el punto de vista matemático el problema que se resuelve es:

$$[K]\{U\} = \{P\} \tag{21}$$

donde  $K$  es la matriz de rigidez global del chasis del vehículo,  $U$  es el vector desplazamientos generalizados y  $P$  el vector cargas generalizadas.

**Estructura del programa**

El programa se encuentra constituido por treinta funciones, que constituyen al pre-procesamiento, procesamiento y pos-procesamiento. La versión actual se adecua para automóviles de la categoría Súper TC 2000.

Las funciones que se ubican en la etapa de pre-procesador se asocian con el ingreso y manipulación de información; son aquellas que interactúan con el usuario permitiendo la entrada de datos, ya sea mediante teclado o por archivos. Contienen una parte del código destinado a evaluar la validez de los datos ingresados; además almacenan la información recopilada en matrices de datos que posteriormente serán utilizadas por las funciones que pertenecen a la etapa de procesador. Estas últimas constituyen el núcleo principal del programa, ya que poseen como finalidad implementar el método de la rigidez al chasis vehicular; se encargan de crear las matrices de rigidez de cada barra, ensamblar la matriz global, generar el vector de cargas y obtener la solución. Los resultados obtenidos en esta etapa se almacenan en matrices de datos, las cuales serán invocadas por las funciones pertenecientes a la etapa de pos-procesador. Las funciones que integran la última etapa poseen como meta exhibir los resultados conseguidos de acuerdo a lo solicitado por el usuario, ya sea en forma de gráficos y/o en forma numérica mediante archivos de salida.

El programa cuenta con una interfaz gráfica que facilita su utilización. El menú principal está constituido por tres secciones: ingreso de datos, tipo de solución y resultados.

**Verificación del funcionamiento del programa**

En la etapa de concepción del software se ha verificado el correcto desempeño del núcleo principal de cálculo, mediante la resolución de problemas de resultados conocidos. Se han resuelto tres ejercicios, aquí se presenta uno de ellos. La Fig. 7 muestra un pórtico plano con nodos rígidos y articulados, sometido a una carga distribuida  $q$  y

una carga concentrada  $P$ . Las tres barras que lo constituyen poseen las mismas propiedades geométricas y mecánicas. La Tabla 1 resume los datos del problema.

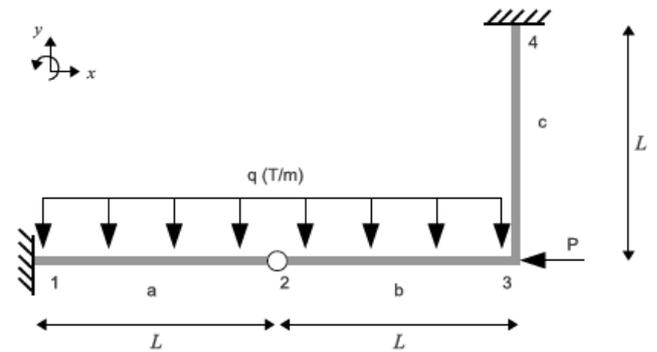


Fig. 7 Estructura plana con nodos rígidos y articulados (José Luis Blanco Claraco *et al.*, 2012).

La Tabla 2 y la Tabla 3 presentan los desplazamientos nodales y los giros nodales respectivamente, la Tabla 4 y la Tabla 5 exhiben las reacciones de apoyo, todos ellos obtenidos mediante el núcleo de cálculo de SimuDinamic.

TABLA 1. Datos del problema de verificación.

Datos del problema	
$P$	1 [Tn]
$q$	2 [Tn/m]
$L$	1 [m]
$A$ (área de la sección)	28.5 [cm <sup>2</sup> ]
$I$ (inercia de la sección)	1940 [cm <sup>4</sup> ]
$E$ (módulo de elasticidad)	2.1x10 <sup>6</sup> [Kgf/cm <sup>2</sup> ]

TABLA 2. Desplazamientos nodales obtenidos por SimuDinamic.

Nodo	Despl. X [m]	Despl. Y [m]	Despl. Z [m]
1	0	0	0
2	0,00109x10 <sup>-3</sup>	-0,8322x10 <sup>-3</sup>	0
3	0,00219x10 <sup>-3</sup>	-0,0280x10 <sup>-3</sup>	0
4	0	0	0

TABLA 3. Giros nodales obtenidos por SimuDinamic.

Nodo	Giro X [rad]	Giro Y [rad]	Giro Z [rad]
1	0	0	0
2	-	-	-
3	0	0	0,4325x10 <sup>-3</sup>
4	0	0	0

TABLA 4. Reacciones de apoyo obtenidas por SimuDinamic.

Nodo	Fuerza X [N]	Fuerza Y [N]	Fuerza Z [N]
1	-655,516	10172,3679	0
2	0	-14715	0
3	-9810	-12262	0
4	10465,51	16804,6	0

TABLA 5. Reacciones de apoyo obtenidas por SimuDinamic

Nodo	Momento X [Nm]	Momento Y [Nm]	Momento Z [Nm]
1	0	0	10172,3679
2	-	-	-
3	0	0	2452
4	0	0	3470,6569

Una comparación entre los resultados obtenidos y los provistos por la bibliografía (véase Fig. 8) permite concluir

que el núcleo de cálculo de SimuDinamic funciona correctamente. El error máximo que aparece entre resultados análogos es de 0,1 %.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -655,25 \\ 10161,99 \\ 10161,99 \\ 0 \\ -14700 \\ -9800 \\ -12250 \\ 2450 \\ 10455,25 \\ 16788,01 \\ 3467,24 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \end{matrix}$$

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,095 \cdot 10^{-6} \\ -8,314506 \cdot 10^{-4} \\ 2,19 \cdot 10^{-6} \\ -2,805 \cdot 10^{-5} \\ 4,32102 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{matrix} (m) \\ (m) \\ (m) \\ (m) \\ (rad) \end{matrix}$$

Fig. 8 Resultados provistos por la bibliografía (José Luis Blanco Claraco et al, 2012).

### DETERMINACIÓN DE LA RIGIDEZ TORSIONAL MÍNIMA Y SUFICIENTE DE UN CHASIS DE COMPETICIÓN

#### Objetivo

La presente aplicación tiene como objetivo determinar la *magnitud mínima y suficiente de rigidez torsional* que debe disponer la estructura de seguridad del automóvil adoptado, para hacer posible, mediante modificaciones en las suspensiones, un comportamiento dinámico adaptado a diversas circunstancias. Se realiza un análisis de la  $C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$  en función de la rigidez torsional de la jaula  $K_E$  y distintas barras estabilizadoras. Los resultados se evalúan teniendo en cuenta la capacidad de modificación de la carga lateral transferida.

#### Procedimiento de evaluación

##### 1) Evaluación de la rigidez de la jaula

Para calcular la rigidez torsional de las estructuras de seguridad en los modelos computacionales se adopta una metodología que concuerda con la forma experimental de medir dichas estructuras en un banco de ensayo. El procedimiento que se emplea es el siguiente: a) se restringen los grados de libertad de los puntos de vinculación del eje trasero a la jaula (puntos A), Fig. 9. b) Se aplican dos fuerzas  $F$  de igual magnitud y dirección contraria en los puntos de conexión de los extremos delanteros de las parrillas inferiores de suspensión a la estructura de seguridad (puntos B), Fig. 9. c) Se mide el ángulo rotado  $\varphi$  por el tren delantero y se aplica la ec. (22) para determinar la rigidez  $K_E$ .

$$K_E = \frac{Fd_p}{\varphi} \quad (22)$$

donde  $d_p$  es la distancia entre el punto de conexión delantero de la parrilla inferior derecha e izquierda.

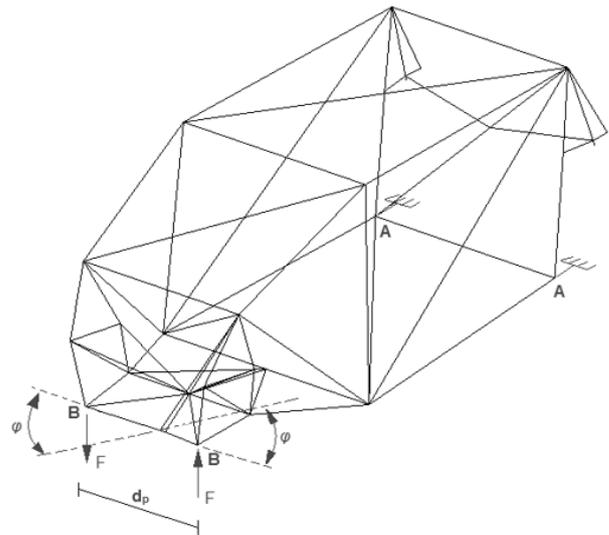


Fig. 9 Estructura de seguridad sometida a un ensayo de rigidez.

##### 2) Análisis de la Carga Lateral Transferida

A efectos de analizar las máximas transferencia de carga en función de la rigidez torsional de la jaula  $K_E$  se determinan las  $C_{Td}$  y  $C_{Tt}$  en casos extremos a saber: a) un vehículo equipado con barra delantera de rigidez variable y sin barra estabilizadora trasera; y b) un coche con barra trasera de rigidez variable y sin barra delantera. En ambos casos, la rigidez de la barra se modifica variando el diámetro y el espesor, y manteniendo constante su longitud.

Con el objetivo de determinar la magnitud mínima y suficiente de rigidez torsional se hace uso de los parámetros  $R_d$  y  $R_t$ , definidos por la ec. (16). Las formas de las curvas de relación de transferencia permiten obtener la rigidez deseada. En efecto, considérese el cambio de  $R_d$  y  $R_t$  obtenido por la variación finita de  $K_E$  al pasar desde una estructura de seguridad a otra. La  $R_d$  y  $R_t$  tienden a ser independientes de la rigidez torsional de la jaula  $K_E$  para cuando esta última es suficientemente alta. Sin embargo, resulta necesario establecer un criterio que permita, a los fines prácticos, determinar esta independencia en forma cuantificada. El criterio que se adopta es conseguir una relación mínima de incrementos adimensionalizados de  $R_d$  y  $R_t$  respecto del incremento adimensional de la rigidez torsional  $K_E$ , véase ec. (23).

$$\frac{\Delta R_d}{\Delta K_E} < 0,02 ; \frac{\Delta R_t}{\Delta K_E} < 0,02 \quad (23)$$

con

$$\Delta R_d = \frac{R_{d \text{ final}} - R_{d \text{ inicial}}}{R_{d \text{ inicial}}}; \Delta R_t = \frac{R_{t \text{ final}} - R_{t \text{ inicial}}}{R_{t \text{ inicial}}} \quad (24)$$

y

$$\Delta K_E = \frac{K_{E \text{ final}} - K_{E \text{ inicial}}}{K_{E \text{ inicial}}} \quad (25)$$

El criterio de suficiencia implica que incrementos mayores de rigidez no contribuyen a una mejora significativa en la

$C_{Td}$  y la  $C_{Tt}$ , por lo que desde el punto de vista estructural se considera suficiente.

**Datos del modelo utilizado**

La Tabla 6 resume las propiedades que son comunes en todos los modelos de chasis utilizados. Se proponen catorce estructuras de idéntica geometría espacial, con diferentes secciones transversales de los caños que las conforman. La variación de dichas secciones se realiza incrementando linealmente los diámetros de los tubos. Las rigideces torsionales de los modelos varían entre 3,22 y 45,12 [kNm/°] y quedan definidas por la función

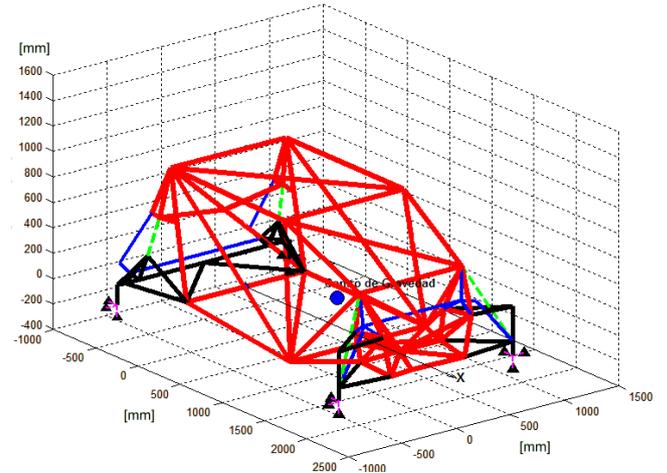
$$[Nm/^\circ] K_E(n) = 239,6n^2 - 370,8n + 3354,4 \quad (26)$$

donde el número entero  $n$  representa la denominación de la jaula,  $n=1, 2, 3, 4...14$ . Esta función resulta de interpolar de manera polinómica la curva de la rigidez torsional  $K_E$  en función del número de jaula  $n$ . Como punto de partida del análisis, se adoptó la jaula del coche Renault Fluence de Súper TC 2000 que participó durante la temporada 2013 (ver Fig. 10). El mismo posee una estructura de seguridad con una rigidez intermedia si se tiene en cuenta el intervalo de análisis establecido (entre la número 10 y 11). El aspecto exterior del conjunto se presenta en la Fig. 10. En color rojo se representa a los componentes de la jaula, en negro los sistemas de suspensión delantero y trasero, en color azul las barras estabilizadoras, en verde los resortes de suspensión y en color rosa los resortes representativos de la rigidez de los neumáticos.

**TABLA 6.** Características del chasis del vehículo que permanecen constantes durante el análisis.

VEHÍCULO: Renault Fluence Súper TC 2000	
PROPIEDAD DEL CHASIS	MAGNITUD
Distancia entre ejes	2640 [mm]
Distancia entre el tren delantero y el CG	1056 [mm]
Altura del CG	430 [mm]
Trocha delantera	1610 [mm]
Trocha trasera	1600 [mm]
Longitud de la barra estabilizadora delantera	900 [mm]
Longitud de la barra estabilizadora trasera	1200 [mm]
Longitud del extremo de la barra delantera	90 [mm]
Longitud del extremo de la barra trasera	120 [mm]
Longitud del eje trasero	1460 [mm]
Diámetro del eje trasero	100 [mm]
Espesor del eje trasero	1.6 [mm]
Diámetro de las barras longitudinales del eje trasero	32 [mm]
Espesor de las barras longitudinales del eje trasero	1.2 [mm]
Diámetro de los brazos de suspensión	44 [mm]
Espesor de los brazos de suspensión	2.5 [mm]
Diámetro del tensor de la barra estabilizadora	25 [mm]
Rigidez de los resortes delanteros de suspensión	145 [N/mm]
Rigidez de los resortes traseros de suspensión	105 [N/mm]
Rigidez vertical del neumático	280 [N/mm]
Rigidez lateral del neumático	150 [N/mm]
Rigidez longitudinal del neumático	380 [N/mm]
Masa vehicular	1100 [kg]
Rigidez de los resortes delanteros de suspensión	2640 [mm]

Los equipos de competición suelen definir en la etapa de diseño un conjunto de barras estabilizadoras, tal que combinándolas pueden conseguir la distribución de cargas deseadas y alcanzar la estabilidad vehicular.



**Fig. 10** Modelo vehicular tipo resuelto por SimuDinamic.

En este trabajo, se emplea un set de ocho barras estabilizadoras, cuatro delanteras y cuatro traseras, cuyas dimensiones se especifican en la Tabla 7. Se adopta este conjunto de barras ya que fue el utilizado por el equipo Renault en la temporada 2013.

**TABLA 7.** Kit de barras estabilizadoras utilizadas.

BARRAS ESTABILIZADORAS				
Designación nro.	Diámetro [mm]	Espesor [mm]	Longitud Delanteras [mm]	Longitud Traseras [mm]
0	Barra de rigidez nula			
1	28	1.2	900	1200
2	38	1.6	900	1200
3	44	1.6	900	1200
4	50	2.1	900	1200

**Resultados**

A continuación se presentan los resultados del análisis de carga lateral transferida. Se muestran, a modo de ejemplo, tres curvas de variación de la  $C_{Td}$  y  $C_{Tt}$  en función de  $K_E$  que corresponden a los conjuntos de barra delantera/barra trasera designadas como 0/0, 4/0 y 0/4 respectivamente, ver Tabla 7. En todos los casos se impuso una aceleración lateral de 1 g.

La Fig. 11 presenta el caso 0/0. Para magnitudes bajas de rigidez torsional  $K_E$  el tren delantero transfiere una carga mayor que el tren trasero, sin embargo a medida que aumenta  $K_E$  disminuye la carga transferida por el tren delantero y aumenta la carga que transfiere el tren trasero. Finalmente  $C_{Td}$  y  $C_{Tt}$  toman magnitudes constantes a partir de cierto valor de  $K_E$ . En términos de los parámetros adimensionales definidos en la ec. (15), este caso corresponde a  $\beta < 1$  y  $\gamma < 1$ . Debe notarse que para magnitudes bajas de  $K_E$ , la carga transferida está dominada por la posición longitudinal del CG; en este caso como  $\beta < 1$  la  $C_{Td} > C_{Tt}$ . También se puede observar que, si bien la rigidez de los resortes delanteros de suspensión es mayor que la rigidez de los resortes traseros (ver Tabla 6), la rigidez

torsional equivalente trasera  $K_r$ , es mayor que la delantera  $K_d$ , esto obedece al tipo de sistema de suspensión.

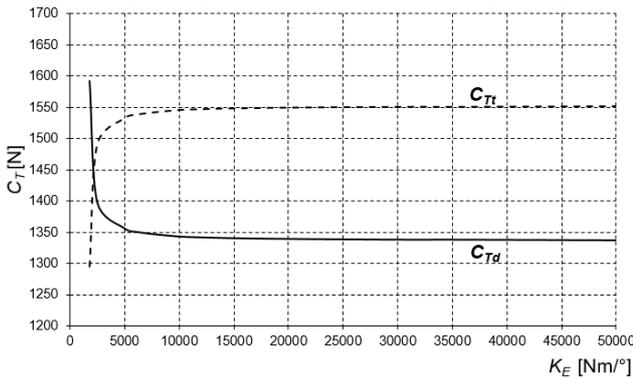


Fig. 11 Carga lateral transferida para el vehículo sin barras estabilizadoras.

En la Fig. 12 se muestran los resultados obtenidos para el caso 4/0. Para rigideces  $K_E$  bajas, ambas curvas toman valores análogos a los de la Fig. 11, esto permite nuevamente afirmar que para valores bajos de  $K_E$ , la transferencia de cargas esta controlada por la posición longitudinal del CG. Luego, en la medida que se incrementa la rigidez torsional aumenta la carga lateral transferida delantera y disminuye en la misma proporción la carga transferida trasera. Este caso corresponde a  $\beta < 1$  y  $\gamma > 1$ . Nótese que a diferencia del caso anterior, la presencia de la barra estabilizadora delantera produce que  $K_d > K_r$ . Además las curvas de  $C_{Td}$  y  $C_{Tr}$  toman valores constantes para magnitudes más elevadas de  $K_E$ .

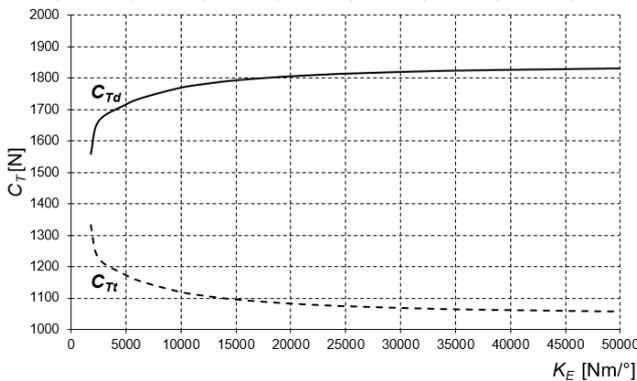


Fig. 12 Carga lateral transferida, caso 4/0.

En la Fig. 13 se presenta el caso 0/4. Como el tren trasero ha elevado su rigidez debido a la presencia de la barra estabilizadora, la carga que transfiere es mayor que en el caso 0/0, mientras que la carga transferida por el tren delantero es menor. Este caso corresponde a  $\beta < 1$  y  $\gamma < 1$ , la barra estabilizadora trasera origina que la rigidez  $K_r$  sea mayor que la análoga del caso 0/0. Del mismo modo que en el caso 4/0, las curvas de  $C_{Td}$  y  $C_{Tr}$  alcanzan magnitudes constantes para valores de  $K_E$  más elevados respecto del caso 0/0.

Finalmente se analizan las relaciones de transferencia  $R$ . La Fig. 14 presenta en línea continua la relación de transferencia delantera  $R_d$  y en línea de trazos la trasera  $R_r$ . Ambas se grafican en función de la rigidez torsional de la jaula  $K_E$ . Los presentes casos presentan una rigidez nula de

la barra estabilizadora trasera y se toma como variable paramétrica, la rigidez de la barra estabilizadora delantera. Se grafican entonces los casos con designaciones 0/0, 1/0, 2/0, 3/0 y 4/0. De la misma forma, en la Fig. 15 se grafican los casos con designaciones 0/0, 0/1, 0/2, 0/3 y 0/4. Estos corresponden a una barra delantera de rigidez nula y barra trasera con rigidez variable.

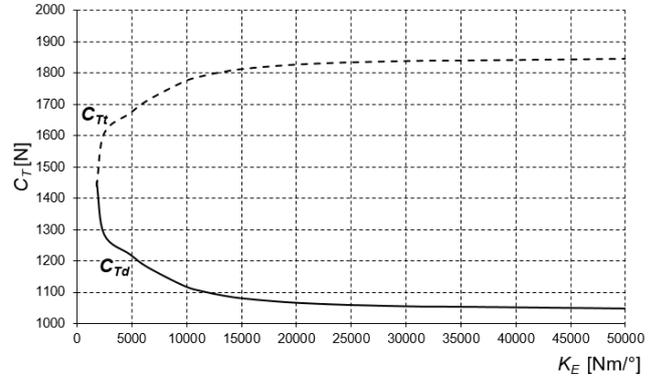


Fig. 13 Carga lateral transferida, caso 0/4.

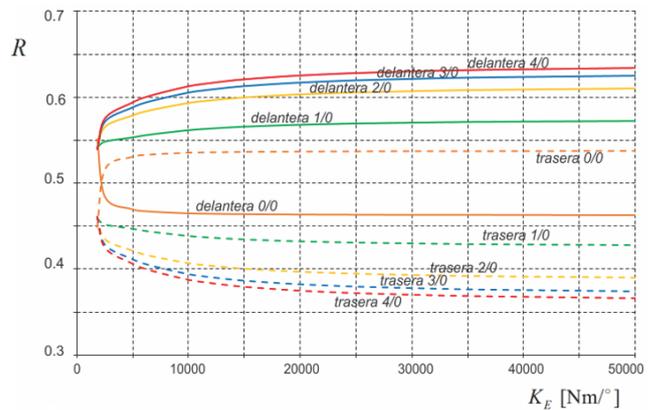


Fig. 14 Relaciones de transferencias delantera y trasera, casos sin barra trasera.

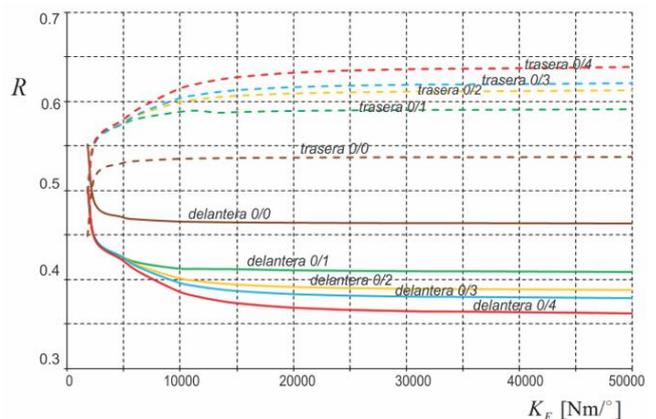


Fig. 15 Relaciones de transferencias delanteras y traseras, casos sin barra delantera.

Se observa que el caso 0/0 se corresponde con una relación de transferencia delantera/trasera de aproximadamente 46/54 %. De los resultados alcanzados se determina que con el set de barras que empleó el equipo Renault es posible llegar a transferencias máximas de carga delantera/trasera iguales a 67/33 % y 33/67 %, lo que se

considera suficiente para equilibrar el vehículo y corregir tendencias subviradoras y sobreviradoras.

Resulta importante destacar que, desde el punto de vista físico, es imposible conseguir que la carga sea transferida en su totalidad por uno de los trenes; esto también permite afirmar que incrementos sucesivos en la rigidez de una de las barras estabilizadoras no producen un aumento indefinido en la carga lateral transferida, sino que ésta va a tender hacia un valor asintótico.

Si se aplica el criterio definido con anterioridad para determinar la rigidez torsional mínima y suficiente sobre los datos numéricos utilizados para construir las curvas de las Fig. 14 y Fig. 15 se obtiene que, a los fines de la transferencia lateral de carga, la magnitud de rigidez torsional mínima que debe disponer la estructura de seguridad del vehículo que utilizó el equipo Renault es de  $23370 \text{ Nm}^\circ$ , ya que para magnitudes mayores solo se podría aumentar la transferencia en un 0,3% más, sin producir beneficios significativos. La rigidez torsional de la jaula que utilizó el equipo Renault es de  $36000 \text{ Nm}^\circ$ , lo que equivale a un 35% más que la determinada mediante el análisis realizado anteriormente.

## CONCLUSIONES

El comportamiento dinámico de los automóviles es analizado desde un punto de vista estructural mediante un modelo simplificado de la estructura del chasis y las suspensiones, lo que permite analizar y comprender el fenómeno de transferencia lateral de carga. También permite estudiar la influencia que posee la rigidez torsional de la estructura de seguridad en el control de la carga lateral transferida mediante los elementos elásticos que constituyen los sistemas de suspensión.

Por otro lado, se desarrolla un programa computacional que permite la evaluación y la puesta a punto del chasis y componentes de suspensión de un coche de Súper TC 2000. Este software, que utiliza el método de la rigidez para modelar el chasis, ha demostrado ser una herramienta confiable y segura, que cumple con los objetivos inicialmente propuestos mejorando notablemente la capacidad y exactitud de las estimaciones que el personal técnico de un equipo de competición necesita realizar. Posibilita la evaluación y corrección de la jaula y de los elementos constituyentes de las suspensiones del vehículo para mejorar el desempeño dinámico. Además, permite la lectura de registros de aceleración, lateral y longitudinal, y velocidad lineal para la evaluación de la adherencia de los neumáticos en el desarrollo del circuito (Emmanuel Beltramo, 2015).

Como aplicación práctica se determina la magnitud mínima y suficiente que debe poseer la rigidez torsional de la estructura de seguridad de un coche típico de la categoría, para compensar de manera adecuada actitudes de subviraje o sobreviraje. Se determinó, exclusivamente desde el punto de vista de la carga lateral transferida, que la rigidez mínima requerida es de  $23370 \text{ Nm}^\circ$ , un 35% menos que la que posee la jaula utilizada por el equipo Renault, lo que puede significar una reducción del peso del coche.

## REFERENCIAS

- [1] Giancarlo Genta y Lorenzo Morello, (2009), "*The Automotive Chassis*", Vol. 1, Ed. Springer, California.
- [2] Thomas Gillespie, (1992), "*Fundamentals of Vehicle Dynamics*", Society of Automotive Engineers, Warrendale, United States.
- [3] Lane Thomas Borg, (2009), "*An approach to using Finite Element Models to Predict Suspension Members load in a Formula SAE Vehicle*", Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, United States.
- [4] Emmanuel Beltramo, (2015), "*Simulación Dinámica Estructural de un Vehículo de Competición*", Dpto. de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
- [5] Iñaki Dorronsoro Etxeberria, (2004), "*Estudio y elección de un modelo matemático de neumático*", Tesis, Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de Navarra, España.
- [6] Juan Alberdi Urbieto, (2003), "*Amortiguadores y Suspensión*", Tesis, Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de Navarra, España.
- [7] W.F. Milliken y D.L. Milliken, (1995), "*Race Car Vehicle Dynamics*", Vol. 1, Society of Automotive Engineers, Warrendale.
- [8] Reza N. Jazar, (2008), "*Vehicle Dynamics: Theory and application*", Ed. Springer, Nueva York.
- [9] Hans Pacejka, (2012), "*Tire and Vehicle Dynamics*", Elsevier Ltd., United States.
- [10] José Luis Blanco Claraco et al, (2012), "*Análisis Estático de Estructura por el Método Matricial*", Depto. De Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación; Universidad de Málaga, Málaga.
- [11] M. Asghar Bhatti, (2005), "*Fundamental Finite Element Analysis and Applications*", John Wiley & Sons, United States.
- [12] Young W. Kwon y Hyochoong Bang, (1997), "*The Finite Element Method using Matlab*", CRC Press, University of Minnesota, United States.