

Refinamiento local de mallas en el método de red de vórtices inestacionario y no-lineal

Matías J. Stefanutti¹, Sergio Preidikman^{1,3} y Bruno A. Roccia^{2,3}

¹ Dpto. de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.

² Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Río Cuarto, Río Cuarto, Argentina.

³ Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, IDIT UNC-CONICET, Córdoba, Argentina.

Fecha de recepción del manuscrito: 15/03/2016

Fecha de aceptación del manuscrito: 25/08/2016

Fecha de publicación: 30/09/2016

Resumen— Es conocido que el método de red de vórtices no lineal e inestacionario (UVLM) produce mejores resultados cuando las láminas vorticosas, que modelan la capa límite y las estelas, se discretizan mediante elementos rectangulares y uniformes, dando lugar a redes fuertemente estructuradas. Además, la densidad de los elementos que componen estas grillas afecta directamente la precisión de las simulaciones numéricas resultantes. Hasta el momento, el refinamiento global de la malla es el único mecanismo conocido que permite mejorar la calidad de tales resultados. En este trabajo se presenta una variante del UVLM que permite refinar localmente la red de vórtices adherida a las superficies sustentadoras mediante la introducción de un nuevo conjunto de elementos, llamados elementos de transición. Mediante su utilización es posible reducir el tamaño de los segmentos vorticosos en ciertas áreas de interés de la red, con el objetivo de obtener resultados con mayor resolución; mientras que en el resto de la lámina adherida se utilizan segmentos de mayor tamaño. La utilización de estas redes localmente refinadas permite una disminución significativa del costo computacional cuando se lo compara con un refinado global. El método desarrollado fue validado exitosamente por medio del estudio de superficies sustentadoras de geometría simple.

Palabras clave— Aerodinámica no estacionaria, sistemas aeronáuticos no convencionales, UVLM, refinamiento local.

Abstract— It is very well known that the non-linear and unsteady vortex-lattice method (UVLM) produces better results when the vortex sheets, that simulate the boundary layer on the body and the free wakes, are discretized using uniform rectangular vortex-rings elements generating strongly structured lattices (or meshes). Moreover, the density of these grids strongly affect the accuracy of the numerical simulations. So far, global refinement is the only mechanism known to improve the precision of such results. In this paper, a modified and enlarged version of the UVLM is presented, which admits the local refinement of the body bound-vortex lattice by the introduction of a set of new elements, called transition elements. Using these elements, it is possible to reduce the size of the vortex lines on specific areas of the vortex lattice in order to improve the resolution of the results, while keeping larger vortex lines in the rest of the bound-vortex sheet. The lattice refined in this way allows a significant reduction of the computing costs. The method developed was successfully validated by the study of lifting surfaces with simple geometries.

Keywords— non-linear aerodynamics, nonconventional aeronautical systems, UVLM, Local refinement.

INTRODUCCIÓN

La necesidad de predecir las características aerodinámicas a la hora del diseño de aeronaves ha dado lugar a una gran variedad de métodos de cálculo a lo largo de los años. En particular, entre todos ellos, el método de red de vórtices (VLM), y su posterior versión inestacionaria (UVLM), pese a las restricciones impuestas por las hipótesis tomadas en su formulación, se ha ganado un lugar importante en diversas aplicaciones. Su simplicidad y sus acotados requerimientos de capacidad de cálculo lo convierten en una opción ampliamente utilizada.

El UVLM asume como hipótesis de cálculo un flujo potencial, es decir, considera un flujo no viscoso, irrotacional e incompresible. Desde un punto de vista práctico, ésta hipótesis se traduce en un flujo subsónico caracterizado por un elevado número de Reynolds; hecho que permite afirmar que los efectos viscosos son relativamente pequeños y que pueden considerarse confinados en las capas límites y estelas. A pesar de que el vuelo de insectos y aves pequeñas está caracterizado por un número de Reynolds relativamente bajo, el UVLM ha sido utilizado exitosamente para estudiar la aerodinámica no estacionaria de micro vehículos aéreos de alas batientes inspirados en la biología (Ghommem *et al.*, 2010; Roccia *et al.*, 2013).

El presente trabajo está basado en la versión del UVLM desarrollada para la simulación del comportamiento aeroelástico inestacionario no lineal (Preidikman, 1998). Diferentes versiones de este método han sido exitosamente

Dirección de contacto:

Matías Jesús Stefanutti, Obispo Trejo 1294 3 "B", Córdoba Capital, X5000 IYZ, +549 351 5552617, mstefanutti@unc.edu.ar.

implementada en variadas aplicaciones, de las cuales se puede citar el análisis de comportamientos aeroelásticos no lineales en la mecánica del vuelo (Wang *et al.*, 2006; Murua *et al.*, 2010) y su optimización (Stanford y Beran, 2011); el estudio de aeronaves de alas rotantes (Rötgermann *et al.*, 1992; Wie *et al.*, 2009), aerogeneradores (Ramos *et al.*, 2001; Døssing, 2007); análisis aerodinámicos de alas batientes (Fritz and Long, 2004; Stanford y Beran, 2010; Roccia *et al.*, 2013) y de aeronaves con alas que cambian de forma “*morphing wings*” (Obradovic and Subbarao, 2011; Ghommem *et al.*, 2012; Verstraete *et al.*, 2015).

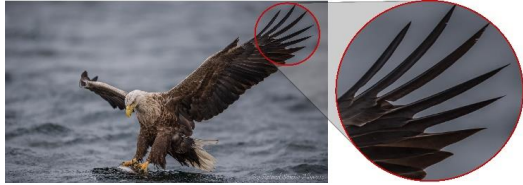


Fig. 1. Ejemplo de un ave desplegando una serie de plumas en las puntas de sus alas.

Sin embargo, en todas estas aplicaciones el método ha sido utilizado con elementos de tamaño uniforme en toda la red adherida, ya que ninguna permite la implementación de refinamientos locales de las mallas aerodinámicas. Una buena calidad en los resultados requiere el uso de una malla aerodinámica estructurada y uniforme, lo cual dificulta la implementación de mallas localmente refinadas. El desarrollo de una estrategia de refinado local eficiente permitiría abordar el estudio de una gran diversidad de problemas, tales como: i) el estudio del vuelo de aves e insectos donde ocurren fenómenos aerodinámicos a diferentes escalas; y ii) la generación de pequeños vórtices debido a la separación de plumas de la superficie principal del ala de un ave, entre otros. En el método clásico de red de vórtices, la única manera de mejorar la calidad de los resultados es mediante un refinado global, aumentando por lo tanto, enormemente el costo computacional. En contraste, un refinado local puede mejorar drásticamente la resolución sobre una relativamente pequeña parte del modelo (fig.1), traduciéndose directamente en la disminución de tiempo de cómputo.

En este trabajo se presenta una variante del UVLM que permite el refinado local de la red sobre las zonas de interés, de manera de poder utilizar una red gruesa sobre la mayor parte del modelo junto con una red lo suficientemente fina sobre los sectores que así lo requieren. De esta manera, con un costo computacional relativamente bajo, se pueden obtener resultados con una mayor resolución en zonas críticas del sistema bajo estudio.

EL MÉTODO CLÁSICO

Cuando se produce un movimiento relativo entre un cuerpo y el fluido que lo rodea, para cumplir con la condición de no deslizamiento, se genera un gradiente de velocidades en una región relativamente delgada adyacente al cuerpo. Este gradiente implica la existencia de vorticidad en esta región conocida como capa límite. Al mismo tiempo, en diferentes partes del cuerpo se produce emisión de vorticidad hacia el seno del fluido en forma de una superficie vorticiosa que es transportada por el fluido.

Modelización del campo de fluido

El método UVLM se obtiene a partir de la expansión asintótica de las ecuaciones de Navier-Stokes considerando un flujo cuyo número de Reynolds tiende a infinito. Esta hipótesis permite considerar que: i) la vorticidad del flujo está concentrada en las capas límites y las estelas, de esta manera todo el flujo fuera de estas regiones puede considerarse irrotacional, y ii) el espesor de las regiones vorticosas es infinitamente delgado, y por lo tanto pueden ser modeladas como láminas vorticosas.

En el modelo se considera una lámina vorticiosa adherida a la superficie del cuerpo que representa la capa límite sobre la superficie del cuerpo. Para el caso de alas delgadas las láminas vorticosas ubicadas sobre el extradós y el intradós colapsan en una única lámina vorticiosa ubicada en la línea media del perfil. La posición de la lámina adherida está especificada, por lo tanto, un salto finito de presión existe a través de ella.

Existe también una lámina vorticiosa libre, la cual representa la estela. Su posición es desconocida y es parte de la solución del problema. Sobre la estela no existe salto de presión y por lo tanto se obtiene una lámina libre de fuerzas que puede deformarse sin restricciones. La lámina adherida y la lámina libre están unidas a lo largo de los bordes de emisión de vorticidad hacia el seno del fluido, donde se cumple la condición de Kutta para flujos inestacionarios.

En el método de red de vórtices inestacionario las láminas vorticosas son reemplazadas por una red de segmentos vorticosos de circulación espacial constante, $\Gamma_i(t)$, dividiendo la superficie del cuerpo en un número finito de elementos. Las estelas son también discretizadas mediante segmentos vorticosos libres los cuales están unidos a la red adherida a través de las líneas de separación, tales como los bordes de fuga o las punteras de las superficies sustentadoras.

La experiencia ha demostrado que las formas geométricas que toman estos elementos afectan la precisión y la velocidad de convergencia del método. **Es sabido que una distribución de elementos rectangulares uniformes es la que mejores resultados provee.** Esta constituye una primera limitación del método cuando se intentan modelar superficies con formas geométricas complejas.

El problema matemático

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo incompresible caracterizado por un alto número de Reynolds se reducen a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

Donde ρ representa la densidad considerada constante, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ es el campo de velocidades, $p = p(\mathbf{R}, t)$ el campo de presiones, y \mathbf{R} el vector posición de una partícula de fluido en el espacio. El operador ∇ es un operador diferencial cuya representación en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales está dado por: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$.

Se asume que todas las fuerzas de campo (ej. las fuerzas debidas al campo gravitatorio terrestre) son conservativas y sus potenciales se introdujeron directamente en el término

de la presión. La ecuación de continuidad para un flujo incompresible se expresa como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{2}$$

Para completar la descripción del problema, es necesario añadir a las ecuaciones gobernantes (1) y (2) un conjunto de condiciones de contorno (Konstadinopoulos *et al.* 1981). Asumiendo que la posición de la superficie del cuerpo es conocida, posiblemente como una función del tiempo, la primera condición a imponer es la llamada **condición de no penetración**. Esta requiere que la componente normal de la velocidad del fluido relativa a la superficie del cuerpo sea nula, esto es:

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}_S) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \tag{3}$$

Donde \mathbf{V}_S es la velocidad de la superficie S de cuerpo, y $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario normal a la superficie. En general \mathbf{V}_S y $\hat{\mathbf{n}}$ varían espacial y temporalmente.

Como la lámina vorticiosa adherida ha sido discretizada mediante un número finito de elementos, solo se puede satisfacer la condición de no penetración en un número finitos de puntos, llamados **puntos de control**, de la red adherida. Cada punto de control está ubicado en el centroide geométrico de los nodos que definen cada elemento de la red.

También, una **condición de regularidad en el infinito** es impuesta. Esta condición requiere que las perturbaciones producidas en el fluido por la presencia y movimiento del cuerpo inmerso decaigan conforme nos alejamos del mismo. El modelo adoptado considera al campo de velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ compuesto por dos velocidades diferentes:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \tag{4}$$

El vector \mathbf{V}_∞ es el campo de velocidad de la corriente libre. El campo $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ es la perturbación en el campo de velocidades debida a la presencia del cuerpo.

La perturbación $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ está asociada con la vorticidad presente en las láminas que simulan las estelas y capas límites en la superficie del cuerpo; su valor es calculado a partir del aporte de los segmentos vorticosos que componen las redes adheridas y libres. La velocidad en un punto P que ocupa una posición espacial \mathbf{R} , asociada a un segmento vorticoso, rectilíneo, de longitud finita y con circulación espacial, Γ , constante, está dada por la versión discreta de la ley de Biot-Savart (ver fig. 2):

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|^2} [\mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \tag{5}$$

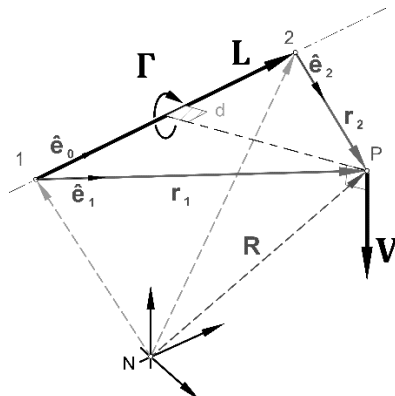


Fig. 2. Velocidad inducida por un segmento vorticoso.

Cuando el punto P pertenece al segmento vorticoso, la ecuación (5) presenta una singularidad. Esta característica es indeseable desde el punto de vista numérico. En este trabajo se utiliza una versión modificada de esta ecuación, donde el núcleo singular es reemplazado por un núcleo suavizado (Chorin, 1994),

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|_2^2 + (\delta \|\mathbf{L}\|_2)^2} [\mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \tag{6}$$

donde δ es el radio del *cut-off*.

El cálculo del campo de velocidades a partir de la ecuación (5), o de la versión con núcleo suavizado (6), satisface automáticamente la condición de regularidad en el infinito.

Con el objetivo de reducir la dimensión del problema se considera a cada elemento de la red rodeado por un “anillo vorticoso” con igual circulación en todos sus lados, $G_i(t)$. Esta modificación permite, además, satisfacer automáticamente **el principio de la conservación de la circulación**. La circulación de cada segmento vorticoso se determina a partir de la circulación de los anillos adyacentes (Preidikman, 1998).

Además de estas condiciones, los **teoremas de Kelvin-Helmholtz** y la **condición de Kutta inestacionaria** son utilizadas para determinar la intensidad y la posición de las láminas vorticosas libres.

El problema consiste entonces en encontrar las circulaciones de cada uno de los anillos vorticosos que componen la red adherida, $G_i(t)$, de manera que el campo de velocidades $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ satisfaga la condición de no penetración en todos los puntos de control sobre la red adherida.

Conocido el campo de velocidades, el campo de presiones se determina por medio de la ecuación de Bernoulli para flujos inestacionarios:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla_R \Phi \cdot \nabla_R \Phi + \frac{p}{\rho} = H(t) \tag{7}$$

Donde $H(t)$ es la energía total, y $\Phi = \Phi(\mathbf{R}, t)$ es el potencial total de velocidad, el cual se puede expresar como:

$$\nabla_R \Phi(\mathbf{R}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) + \mathbf{V}_\infty \tag{8}$$

El lector puede consultar la referencia (Preidikman, 1998) para una descripción detallada de la ecuación (7).

Implementación numérica

La implementación del algoritmo clásico se explica a través de un ejemplo que considera una placa plana. La misma está caracterizada por un alargamiento $AR = 2$ y se encuentra inmersa en un medio fluido inicialmente en reposo que, en el instante $t = 0$, comienza a moverse con una velocidad \mathbf{V}_∞ . La red adherida se discretiza mediante 24 elementos: 4 a lo largo de la cuerda y 6 a lo largo de la envergadura (ver fig. 3). Antes que el movimiento comience, todas las circulaciones son nulas. Cuando el movimiento comienza se modifican instantáneamente los valores de las circulaciones y se crea un vórtice en los bordes de la red adherida; éste es conocido como vórtice de arranque (Prandtl, 1957) y se puede observar en un gran número de experimentos. En el UVLM, La existencia e intensidad del vórtice de arranque están determinadas por la conservación de la circulación.

Para satisfacer la condición de Kutta, los segmentos vorticosos son convectados desde el borde de fuga y las punteras hacia la estela, pero en el instante en que el movimiento se inicia, ninguna vorticidad ha sido aun convectada y por lo tanto no existe la estela.

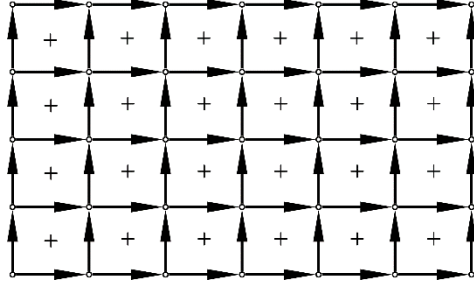


Fig. 3. Discretización de la lámina vorticososa correspondiente a una placa plana.

Con el fin de encontrar los valores de la circulación de cada anillo vorticoso, se construye una matriz de coeficientes de influencia aerodinámicos, A_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, donde N es el número de elementos en la red adherida (anillos vorticosos). El coeficiente A_{ij} representa la componente normal de la velocidad en el i -ésimo punto de control asociada a un anillo vorticoso de circulación unitaria ubicado en el elemento j (fig. 4).

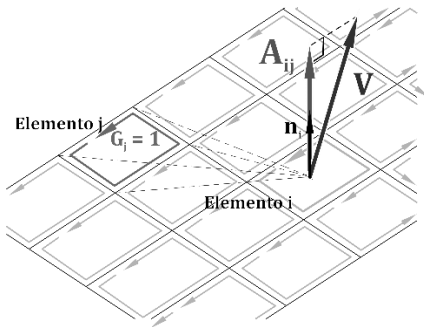


Fig. 4. Coeficientes de influencia aerodinámicos.

Multiplicando A_{ij} por la circulación del j -ésimo elemento, $G_j(0)$, y luego sumando para todos los valores de j se obtiene la componente normal de la velocidad en el punto de control del i -ésimo elemento asociada al conjunto de todos los vórtices adheridos. Por lo tanto, la condición de no penetración, dada por la ecuación (3), se puede reescribir como un sistema de N ecuaciones algebraicas lineales, en general dependiente del tiempo, como sigue:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} G_j(0) = [\mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i, 0) + \mathbf{V}_\infty] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i) \quad (9)$$

con $j = 1, 2, \dots, N$, y donde \mathbf{r}_i es la posición del punto de control del i -ésimo elemento referido a un marco de referencia fijo al ala, y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i)$ su vector unitario normal. En el caso más general, la velocidad de la superficie alar, las circulaciones, los vectores normales, y las posiciones relativas de los nodos (y por consiguiente los coeficientes de influencia aerodinámicos) son funciones del tiempo. En particular, en este trabajo, se asume un ala rígida y por lo tanto los valores de A_{ij} y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i)$ permanecen constantes.

El sistema de N ecuaciones algebraicas dado por ec. (9) puede ser resuelto para las circulaciones desconocidas $G_j(0)$ mediante cualquier procedimiento directo o iterativo. En este trabajo, debido a que la matriz de influencia es constante, se utiliza un método directo basado en la

descomposición LU de la matriz de coeficientes aerodinámicos.

Posteriormente, se avanza un paso de tiempo, $t = \Delta t$, y se convectan los elementos ubicados en los bordes filosos hacia la estela. Este proceso se divide comúnmente en dos partes: i) el cálculo de la nueva posición de los segmentos vorticosos libres, y ii) la asignación del valor de circulación correspondiente.

El cálculo de las posiciones de los segmentos vorticosos se realiza considerando la velocidad local de las partículas de fluido a ser convectadas. En el instante $t = \Delta t$, se crea una fila de nodos perteneciente a la estela. La velocidad local se computa como la suma de la velocidad de la corriente libre y la velocidad \mathbf{U} que representa la velocidad inducida por las láminas vorticosas,

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U} \quad (10)$$

A continuación se calcula el desplazamiento de los nodos que definen los segmentos rectilíneos de vorticidad como,

$$\Delta \mathbf{r} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{v} \, dt \quad (11)$$

La evaluación de la integral expresada en (11) se realiza numéricamente en términos de la velocidad conocida en el paso previo (Kandil *et al.*, 1976).

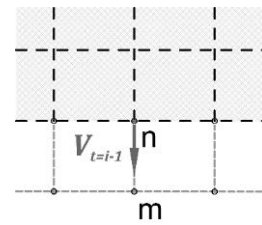


Fig. 5. Cálculo de la posición de los nodos de la estela.

A modo de ejemplificar lo mencionado anteriormente se considera un nodo arbitrario, m (ver fig. 5). La posición del nodo m , luego de la convección, se determina en base a la posición conocida del nodo n (perteneciente a la superficie sustentadora). Para ello se computa, en el nodo n , la velocidad inducida por las láminas vorticosas. Para el primer paso de cálculo solo existe la lámina adherida, y se le suma la velocidad de la corriente libre. Finalmente se multiplica \mathbf{v} por el paso de tiempo,

$$\mathbf{r}_{t=1}^m = \mathbf{r}_{t=0}^n + \mathbf{v}_{t=0}^n \Delta t \quad (12)$$

Una vez convectados los segmentos de vorticidad se debe asignar a los mismos los correspondientes valores de circulación. Este proceso de asignación consiste en transferir, durante el proceso de convección, los valores de circulación desde la red adherida a la estela.

Con el objeto de satisfacer la conservación espacial de vorticidad, no solo se convectan los segmentos, sino los anillos vorticosos completos. Sus valores de circulación vienen dados por los correspondientes a los anillos contiguos en la red adherida en el paso anterior (ver fig. 6). Por otro lado, se debe destacar el tratamiento especial que reciben aquellos anillos vorticosos que se encuentran en las esquinas de la red adherida cuando la estela se convecta desde el borde de fuga y las punteras de las alas. Cada uno de estos anillos en la red adherida es transformado en dos elementos en la red libre.

Una vez finalizado el proceso de convección, se procede a calcular los nuevos valores de circulación sobre la red

adherida. El sistema de ecuaciones expresado en (9) deja de ser válido debido a que en él no se considera el aporte proveniente de la estela. El nuevo sistema se reescribe como:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} G_j = [\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_W + \mathbf{V}_\infty] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (13)$$

Donde $\mathbf{V}_W = \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i, t)$ representa el campo de velocidades asociado con la vorticidad distribuida en la estela en el tiempo t . Este nuevo sistema de ecuaciones se resuelve para obtener las circulaciones de los anillos vorticosos en la red adherida, $G_j(\Delta t)$, para $t = \Delta t$.

Luego, se procede con el siguiente paso de tiempo $t = 2\Delta t$. Para actualizar la forma de la estela primero se recalcula la posición de la segunda fila de nodos. Posteriormente se calcula, por primera vez, una tercera fila de nodos partiendo de las posiciones que tenían los nodos de la segunda fila en el paso anterior. En tanto la primera fila de nodos, se mantiene unida a la superficie sustentadora.

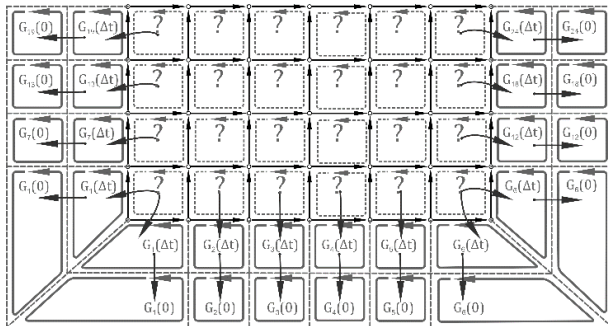


Fig. 6. Convección de anillos vorticosos.

De esta forma los anillos vorticosos definidos en el paso anterior se desplazan creando una segunda fila de elementos en la estela. A la primera fila se transfieren los valores de circulación calculados en el tiempo $t = \Delta t$ (ver fig. 6). Posteriormente, se calculan nuevamente las circulaciones $G_j(2\Delta t)$ sobre la red adherida por medio de la ecuación (9).

Este procedimiento se repite para el número predeterminado de pasos de tiempo. En cada nuevo paso una nueva fila de elementos se forma y convecta desde la red adherida hacia la estela. Debido a que la vorticidad en la estela proviene de la red adherida al sólido en pasos anteriores, el campo de movimiento y la distribución actual de vorticidad sobre la superficie del cuerpo dependen de las distribuciones previas de vorticidad. La vorticidad y la forma de la estela son determinados como parte de la solución y se dice que en ella se guarda la “historia” del flujo.

Variables características

Desde un punto de vista numérico es conveniente utilizar cantidades adimensionales. Para ello se define una serie de variables características que permiten adimensionalizar las magnitudes utilizadas por el algoritmo. Éstas son:

- L_C : largo de la cuerda de un elemento de la red adherida.
- V_C : módulo de la velocidad del flujo sin perturbar, V_∞ , o la velocidad con que se mueve el cuerpo, V_S .
- ρ_C : densidad del fluido sin perturbar.

A partir de estas magnitudes se define el tiempo característico como:

$$T_C = \frac{L_C}{V_C} \quad (14)$$

Esta elección de L_C y V_C presenta dos ventajas. La primera implica que un incremento en el número de elementos a lo largo de la cuerda, se corresponde con una reducción en el paso de tiempo dimensional. La segunda está dada por el hecho de que un paso de tiempo adimensional unitario ($\Delta t = T_C$) genera elementos en las estelas con aproximadamente la misma dimensión de aquellos que componen la red adherida.

Cálculo del coeficiente de presión

La ecuación inestacionaria de Bernoulli (7) puede ser adimensionalizada por medio de las magnitudes características definidas previamente. Se puede escribir entonces, luego de manipulaciones algebraicas, el coeficiente de salto de presión a través de la superficie sustentadora como:

$$\Delta C_{P_i} = 2 (\mathbf{V}_{m_i} \cdot \Delta \mathbf{V}_i) \frac{G_i(t) - G_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (15)$$

donde \mathbf{V}_{m_i} es una velocidad “media” que no está afectada por la presencia de la vorticidad local y $\Delta \mathbf{V}_i$ representa el salto de velocidad tangencial a través del i -ésimo elemento de la lámina vorticiosa.

Para elementos rectangulares, el salto de velocidad $\Delta \mathbf{V}$ se escribe como (Preidikman, 1998):

$$\Delta \mathbf{V} = \frac{-1}{2A} \hat{\mathbf{n}} \times [(\Gamma_1 + F \Gamma_3) \mathbf{L}_1 + (\Gamma_2 + \Gamma_4) \mathbf{L}_2] \quad (16)$$

donde el parámetro F toma el valor 2 para los elementos que se encuentran sobre el borde de ataque de la superficie sustentadora y 1 para todos los demás. Esto se debe a que los elementos ubicados en el borde de ataque no están conectados con otros anillos de la red vorticiosa. Esto implica que la vorticidad que se concentra en esos segmentos representa la densidad de vorticidad de la región de la lámina vorticiosa correspondiente a la mitad de un elemento.

Multiplicando cada ΔC_{P_i} por el área asociada al elemento correspondiente, haciendo la sumatoria de estos sobre toda la superficie sustentadora, y multiplicando por las variables características se obtiene la fuerza total, esto es:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2} \rho_C V_C^2 L_C^2\right) \sum_{i=1}^N \Delta C_{P_i} A_i \hat{\mathbf{n}}_i \quad (17)$$

REFINADO LOCAL

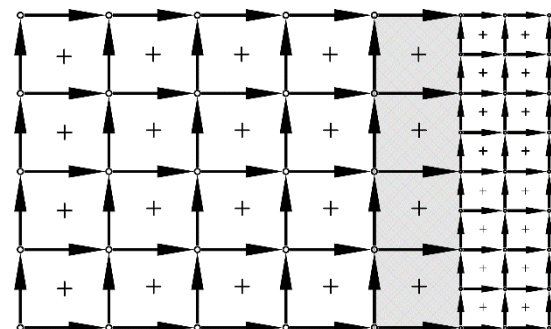


Fig. 7. Convección nodos.

El refinado local es un procedimiento que permite reducir el tamaño de los elementos en zonas específicas de

la red adherida por medio de la introducción de elementos de transición. Estos elementos contienen un conjunto adicional de nodos que permiten dividir uno de sus lados en dos o más segmentos vorticosos. La fig. 7 muestra un posible refinamiento local para el modelo de placa plana antes discutido, donde se resaltan los elementos de transición utilizados. El objetivo de este refinado es reducir el tamaño de los segmentos vorticosos en las punteras alares y así obtener mayor resolución de los resultados en esta región.

Cálculo de la Intensidad de los segmentos vorticosos

El cálculo de las intensidades para una red refinada es similar al seguido en el método clásico. Sin embargo, existe una diferencia cuando se calculan las intensidades de los segmentos vorticosos que componen el lado refinado de los elementos de transición. Estos elementos comparten uno de sus lados con dos o más anillos vorticosos, lo que lleva a la necesidad de computar más de un segmento por cada lado, tal como se puede observar en la fig. 8.

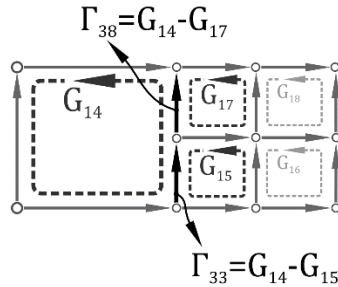


Fig. 8. Segmentos vorticosos en los elementos de transición.

Se debe destacar que el hecho de considerar la superficie sustentadora formada por un conjunto de anillos vorticosos asegura la conservación de la vorticidad, independiente del tamaño o forma de estos anillos.

Convección

El desarrollo de un método de convección para una red refinada localmente presenta un número de dificultades debido a que en cada paso de tiempo se deben convectar elementos de diferente tamaño hacia la estela. Esta problemática condujo al planteo de diferentes técnicas de convección. En este trabajo se presentan las tres alternativas más relevantes y se exhiben sus virtudes y limitaciones. Todos los métodos descritos a continuación utilizan la malla mostrada en la fig. 7.

1) Método 1

Conocida la vorticidad en la red adherida en $t = 0$, se realiza la convección de los primeros elementos hacia la estela y se determina la posición de la estela en $t = \Delta t$. Para ello se define una primera fila de nodos perteneciente a la estela y que coincide con las posiciones de los nodos ubicados sobre el borde de la superficie sustentadora, de manera que ambas redes queden unidas. Para estas posiciones se calcula la velocidad local del flujo y se determina la posición de la siguiente fila de nodos, similar al método clásico. La única diferencia radica en el paso de tiempo utilizado para convectar los nodos pertenecientes a los elementos de transición (elementos más pequeños),

$$\mathbf{r}_{t=1}^m = \mathbf{r}_{t=0}^n + \mathbf{v}_{t=0}^n \tau \Delta t \tag{18}$$

donde el parámetro τ vale 1 si el nodo pertenece a un elemento grande, ó 1/2 si pertenece a un elemento pequeño.

La presencia de los elementos pequeños introduce en cada paso la necesidad de encontrar la posición de nodos ubicados en una tercera fila, de los cuales no se tiene una referencia respecto a su localización en el paso de tiempo anterior. Por lo tanto se utilizan las posiciones de la segunda fila, que se calculan en el presente paso, como una estimación de las posiciones del paso anterior. A partir de esta estimación se calculan las posiciones de la tercera fila de nodos. Es decir, la velocidad local de la partícula de fluido es calculada en base a la posición de la segunda fila de nodos, recientemente obtenida. Cabe aclarar que hasta aquí ninguna vorticidad ha sido convectada, y por lo tanto la velocidad se calcula con la distribución de vorticidad correspondiente al paso anterior, $t = 0$. De esta manera resulta para la tercera fila de nodos:

$$\mathbf{r}_{t=1}^m = \mathbf{r}_{t=1}^n + \mathbf{v}_{t=0}^n 1/2 \Delta t \tag{19}$$

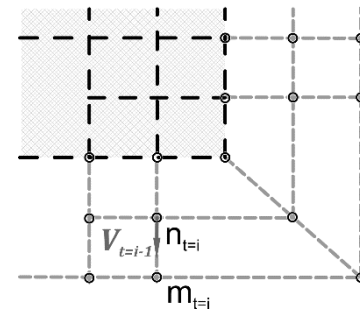


Fig. 9. Cálculo de la posición de las filas adicionales de nodos en la estela para $t = \Delta t$ - Método 1.

Por otro lado, los elementos de transición son tratados enteramente como elementos grandes, y los nodos adicionales que dividen uno de sus lados en dos o más segmentos vorticosos se ubican equidistantes entre los nodos que definen los vértices del elemento convectado. Esta estrategia tiene como objetivo mantener la uniformidad entre los elementos grandes y evitar la deformación excesiva de los elementos de transición.

Una vez realizada la convección de la estela, se asigna la circulación correspondiente a los anillos vorticosos. La asignación de vorticidad de los elementos grandes se realiza como en el método clásico; es decir, la vorticidad calculada en $t = 0$ es transferida desde los elementos en el borde de la superficie sustentadora a los elementos contiguos de la estela.

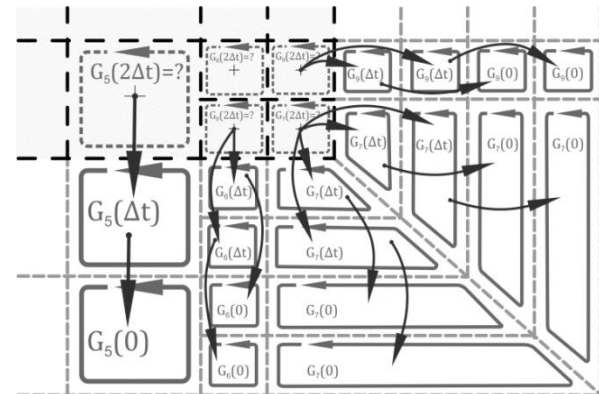


Fig. 10. Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 2\Delta t$ - Método 1

Los elementos pequeños de la primera fila de la estela reciben un tratamiento similar, asignándose la vorticidad que tenía cada elemento contiguo de la superficie sustentadora. Adicionalmente, este proceso se repite el número de veces necesario de manera que a todos los elementos pequeños ubicados en cascada (filas subsiguientes) se les asigne el mismo valor de intensidad. En el caso de estudio adoptado, esto se repite dos veces (ver fig. 10). De esta forma, los elementos pequeños en la estela tienen asignados la misma circulación en anillo, lo cual produce que los segmentos de vorticidad horizontales que dividen los elementos pequeños tengan intensidad nula.

Finalizada la asignación de circulación a los elementos pertenecientes a la estela, se recalculan las intensidades de los segmentos vorticosos en la superficie sustentadora, $G_j(\Delta t)$. Luego se inicia nuevamente el proceso de convección para $t = 2\Delta t$.

Para $t = 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, M\Delta t$ el procedimiento es similar; en cada uno de estos pasos de tiempo se agrega un conjunto de filas. La posición de la primeras filas es computada a partir de la posición de los nodos precedentes en el paso anterior de tiempo, mientras que las filas subsiguientes, que definen a los elementos más pequeños son siempre convectadas a partir de la posición actualizada, para mantener uniformidad en el esquema de cálculo.

Los nuevos elementos que se generan en el paso de tiempo, $t = i\Delta t$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), reciben los valores de circulación de anillo provenientes de los elementos contiguos pertenecientes a la superficie sustentadora, computados en $t = (i - 1)\Delta t$ (ver fig. 10).

Finalmente, se recalculan las circulaciones en la red adherida y se comienza nuevamente el proceso.

2) Método 2

En este método se propone la utilización de **estelas intermedias** dentro de cada paso de tiempo para permitir la convección de los elementos pequeños. Cada una de las estelas intermedias representa una estela parcial. De esta forma, cada paso de tiempo es dividido en **sub-pasos**. Los elementos grandes se convectan en el primer sub-paso y permanecen invariables hasta obtener la estela final correspondiente al paso de tiempo actual. En cambio, los elementos pequeños se incorporan, fila por fila, en cada sub-paso. Este procedimiento permite añadir solo una nueva fila de nodos por cada sub-paso, evitando utilizar las posiciones actualizadas como referencia.

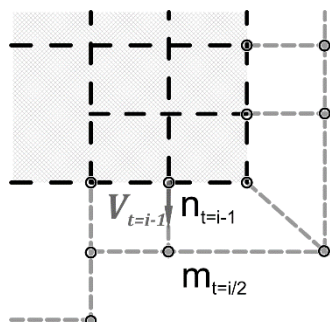


Fig. 11. Cálculo de la posición de los nodos de la estela en $t = 1/2\Delta t$ – Método 2.

El proceso comienza mediante el cálculo de la posición de la primera fila de nodos que es convectada tal como se hace en el método tradicional, pero considerando Δt o $\frac{1}{2} \Delta t$,

según se trate de un elemento grande o pequeño. A diferencia del método tradicional estos nodos crean una estela intermedia correspondiente al sub-paso $t = 1/2 \Delta t$. La asignación de circulación a los anillos vorticosos pertenecientes a la estela intermedia se realiza de igual manera que el método clásico descrito anteriormente. Las fig. 11 y 12 muestran el proceso.

Finalmente se calcula la estela final correspondiente al instante $t = \Delta t$ (ver fig. 13). Para ello se considera que tanto las posiciones de los nodos como así también las circulaciones de los elementos grandes permanecen invariables, mientras que las posiciones de los nodos que definen los elementos pequeños son actualizadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_{t=\Delta t}^m = \mathbf{r}_{t=1/2\Delta t}^n + \mathbf{V}_{t=1/2\Delta t} 1/2 \Delta t \tag{20}$$

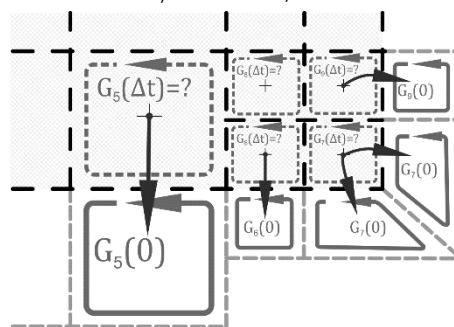


Fig. 12. Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 1/2\Delta t$ – Método 2.

En el ejemplo tratado en este trabajo se utiliza solo una estela intermedia; pero en general se pueden crear tantas estelas como sean necesarias de acuerdo al refinamiento requerido. Se debe aclarar que los nodos pertenecientes a los elementos de transición reciben el mismo tratamiento que en el Método 1.

Cuando el proceso de convección termina, solo resta asignar los valores de la circulación. Como se mencionó anteriormente, se mantiene las circulaciones de los elementos grandes mientras que las de los elementos pequeños son desplazadas junto con ellos. Las circulaciones de los anillos que son agregados se convectan desde la superficie sustentadora utilizando el algoritmo descrito anteriormente para el Método 1 (fig. 14).

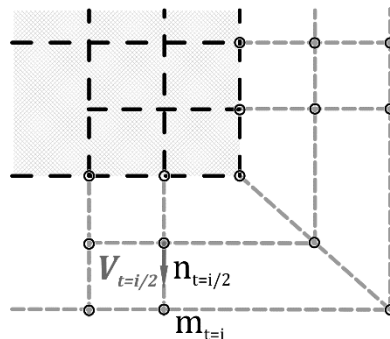


Fig. 13. Cálculo de la posición de los nodos de la estela en $t = \Delta t$ – Método 2.

Una vez obtenida la estela final para este primer paso, se resuelve nuevamente el sistema algebraico lineal expuesto en (13) para las incógnitas $G_j(\Delta t)$. Posteriormente, se avanza un paso de tiempo y el procedimiento comienza nuevamente.

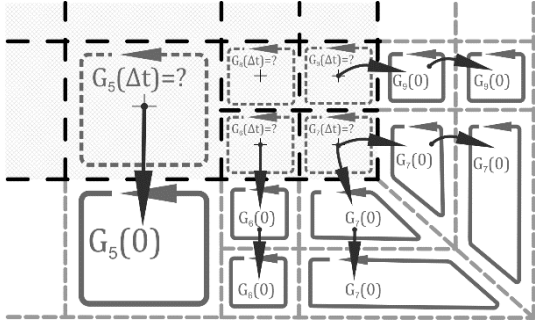


Fig. 14. Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = \Delta t$ – Método 2.

3) Método 3

El Método 3 es similar al Método 2 en cuanto a la utilización de estelas intermedias y la subdivisión de pasos de tiempo. Sin embargo, en este nuevo método, se resuelve el sistema algebraico lineal (13) en cada sub-paso de tiempo para encontrar la distribución de vorticidad en la superficie sustentadora.

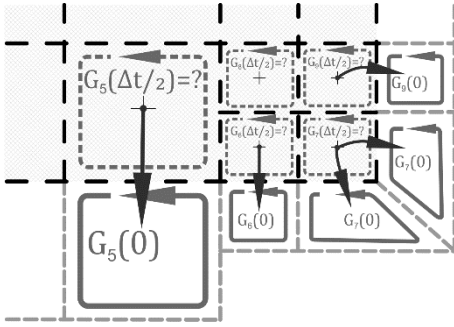


Fig. 15. Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 1/2\Delta t$ – Método 3.

La primera fila de nodos y elementos es conveccionada a la estela de manera idéntica al Método 2 para un tiempo $t = 1/2 \Delta t$ (fig. 15). Sin embargo, en este método, antes de pasar al siguiente sub-paso se vuelven a calcular las circulaciones en la red adherida, obteniéndose así las circulaciones de los anillos correspondientes, $G_j(\Delta t/2)$.

Luego, se realiza nuevamente el proceso de convección con el fin de obtener la estela final correspondiente al primer paso de tiempo. Las posiciones de los nodos que definen los elementos grandes permanecen inalteradas; pero, al igual que en el Método 2, se actualizan las posiciones de los nodos correspondientes a los elementos pequeños. Otra diferencia respecto del Método 2 radica en la actualización de las circulaciones de los elementos grandes que componen la estela y que se localizan adyacentes a la superficie sustentadora en cada sub paso de tiempo. Las circulaciones asociadas a los elementos pequeños no se actualizan, sino que se desplazan con ellos a medida que son conveccionados. Por otro lado, a los elementos pequeños que se suman a la estela en cada sub-paso de tiempo, se les asigna los valores de los anillos correspondientes de la superficie sustentadora (fig. 16).

Obtenida la estela completa para el instante $t = \Delta t$, se vuelve a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales (13), se obtienen las circulaciones, $G_j(\Delta t)$, y se avanza un paso de tiempo.

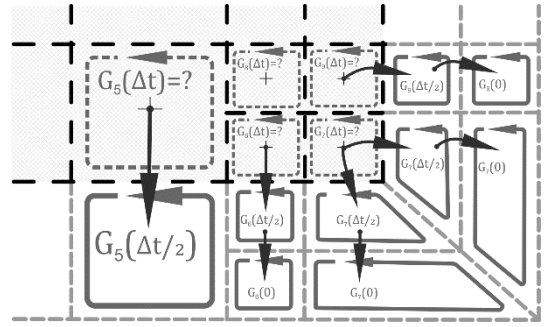


Fig. 16. Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = \Delta t$ – Método 3.

Luego, el procedimiento se vuelve a repetir, se define el sub-paso correspondiente a $t = 3/2\Delta t$, se crea la estela intermedia, y se calculan las intensidades de la red adherida $G_j(3/2\Delta t)$. Después, se avanza un sub-paso de tiempo y se procede a la convección final correspondiente a $t = 2\Delta t$.

Cálculo del coeficiente de presión

El cálculo de los coeficientes de salto de presión para los tres modelos descritos anteriormente es idéntico al procedimiento utilizado en el método clásico. Sin embargo, los elementos de transición requieren un tratamiento especial basado en la definición de un elemento equivalente, compuesto únicamente por cuatro segmentos vorticosos. Esto es, se reemplaza el lado compuesto por más de un segmento por un único segmento, cuya intensidad es un promedio ponderado por las longitudes de las intensidades de los segmentos originales que lo conforman. De esta forma se pueden aplicar las mismas ecuaciones que el método tradicional.

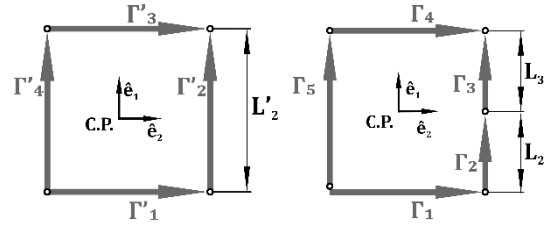


Fig. 17. Elemento equivalente

La fig. 17 compara al elemento de transición que se encuentra en la red de vórtices y el elemento equivalente “virtual” que es utilizado en el cálculo del coeficiente de presión. Si bien, los elementos presentados en la fig. 18 corresponden a un refinado local en donde el segmento original es dividido a la mitad, el procedimiento es general. En el elemento equivalente los segmentos vorticosos originales de intensidades Γ_2 y Γ_3 son reemplazados por un segmento vorticoso de intensidad Γ'_2 , cuyo valor es calculado mediante la expresión:

$$\Gamma'_j = \frac{\sum_{i=n}^m \Gamma_i \|L_i\|_2}{\|L'_j\|_2} \quad (21)$$

Donde n y m representan el primer y último segmento a reemplazar por el segmento equivalente j (en este caso $n = 2$ y $m = 3$).

Las intensidades del resto de los segmentos que componen el elemento equivalente se corresponden directamente con los segmentos del elemento de transición, esto es: $\Gamma'_1 = \Gamma_1$, $\Gamma'_3 = \Gamma_4$ y $\Gamma'_4 = \Gamma_5$.

A partir de este nuevo elemento equivalente se calcula el C_p por medio de la ec. (15), donde el valor de ΔV se expresa en términos del elemento equivalente:

$$\Delta V = \frac{-1}{2A} \hat{n} \times [(\Gamma'_1 + F\Gamma'_3)L'_1 + (\Gamma'_2 + \Gamma'_4)L'_2] \quad (22)$$

RESULTADOS

Intensidades de los segmentos vorticosos

Como se mencionó anteriormente, el algoritmo utiliza valores adimensionales en el proceso de cálculo. La definición de la longitud característica, L_C , nos permite comparar las intensidades de los segmentos vorticosos de diferentes mallados para un mismo problema.

Sin embargo, existe una dificultad asociada a la comparación de intensidades de segmentos vorticosos cuando se utilizan mallas refinadas localmente. El modelo reemplaza una lámina vorticososa continua por una red discreta de vórtices y, por lo tanto, la intensidad de cada segmento vorticososo representa la circulación correspondiente a un sector de la lámina continua.

El algoritmo considera la longitud L_C definida como la cuerda de un elemento de la malla original, no refinada. Sin embargo, en los sectores refinados localmente, los elementos son más pequeños. En estos sectores los segmentos vorticosos representan la vorticidad de un área más pequeña de la lámina vorticososa en comparación a los elementos grandes. Esta diferencia, que no es tenida en cuenta en la adimensionalización, debe considerarse a la hora de comparar las intensidades de segmentos de diferentes refinados.

Con el objetivo de sortear este problema se introduce, a continuación, una nueva propiedad llamada "densidad de vorticidad", γ . Esta se define como el cociente entre la intensidad de un segmento vorticososo y una longitud, B ,

$$\gamma = \frac{\Gamma}{B} \quad (23)$$

Esta longitud se define en referencia al sector de la lámina vorticososa que el segmento representa. Para ello, se considera que dicho sector tiene una forma geométrica similar a un paralelogramo. La longitud B , representa la base de este, mientras que H (longitud del segmento) define su altura (ver fig. 18).

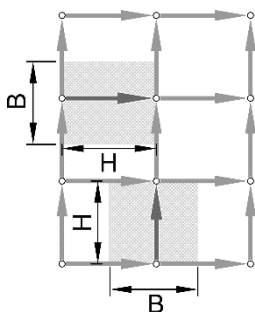


Fig. 18. Representación de la longitud tomada como referencias.

La fig. 19 muestra un mapa de color que representa la densidad de vorticidad para los segmentos vorticosos horizontales en estado estacionario, mientras que la fig. 20 muestra el correspondiente mapa de colores para los segmentos verticales. Se debe recordar que estos resultados corresponden al caso de estudio adoptado en este trabajo.

En la fig. 19 y 20 se puede observar que el sector refinado localmente capta con mayor detalle las variaciones de vorticidad, en este caso la puntera del ala.

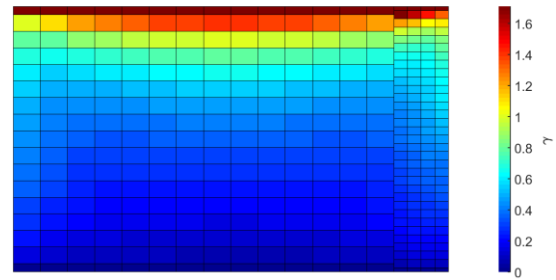


Fig. 19. Distribución de densidades de intensidad de los segmentos vorticosos horizontales.

Sin embargo, se pueden notar cambios abruptos en la densidad de vorticidad asociado a los segmentos verticales localizados en la transición de mallas. Estos segmentos están compartidos por un elemento grande, no refinado, y un elemento más pequeño que sí lo está. La transición de estos dos elementos provoca una alteración local en los valores de intensidad de vorticidad. Estas variaciones son más notorias en las cercanías de los bordes de ataque, donde se producen las mayores variaciones en las intensidades de vorticidad. Este fenómeno constituye un problema aún a resolver.

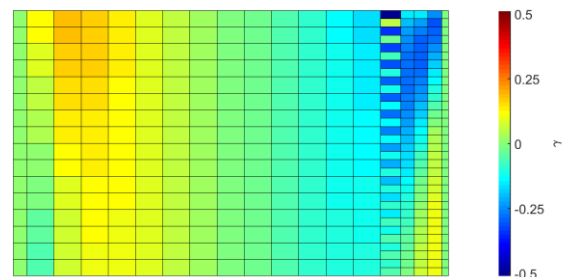


Fig. 20. Distribución de densidades de intensidad de los segmentos vorticosos verticales.

Convección

A continuación se presentan resultados numéricos concernientes al proceso de convección para cada uno de los métodos de refinado local propuestos en este trabajo.

4) Método 1

Los resultados relativos al proceso de convección obtenidos por medio de este método no son satisfactorios en absoluto. Como se puede observar en la fig. 21, el problema principal radica en la aparición de quiebres abruptos en la estela.

La razón detrás de este comportamiento está asociado al cálculo de la posición de las filas adicionales de nodos que componen la estela refinada a partir de nodos cuyas posiciones han sido actualizadas, mientras se considera la estela del paso de tiempo anterior.

Con el objetivo de explicar el origen de este problema, recordemos que en el proceso de convección en $t = 0$ no existe estela, y por lo tanto, los segmentos vorticosos ubicados sobre los bordes de desprendimiento toman valores de intensidades muy grandes en este instante.

Además se debe destacar que un segmento de vorticidad localizado en el borde de fuga o puntera del ala no induce velocidad alguna en un punto ubicado sobre el mismo segmento.

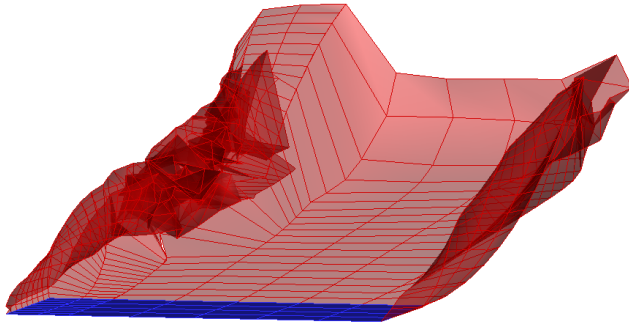


Fig. 21. Estela conectada con el Método 1.

El proceso de convección utilizado por el Método 1 computa la posición de la primera fila de elementos a partir de los nodos localizados en los bordes de desprendimiento. De esta forma, el cálculo de la primera fila de elementos en la estela no presenta ningún problema al igual que el método clásico.

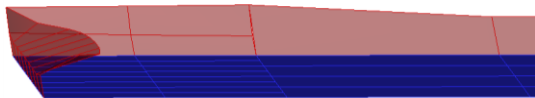


Fig. 22. Estela en el primer paso - Método 1.

En cambio, cuando se calcula la velocidad en las filas adicionales en un refinado local a partir de los nodos con posiciones actualizadas, los segmentos ubicados sobre los bordes de desprendimiento si aportan al cálculo de la velocidad. Específicamente, este aporte es excesivo debido a las grandes intensidades de los segmentos, induciendo velocidades muy elevadas, que deforman la estela desde el comienzo de la simulación (fig. 22).

En $t = \Delta t$, los valores de intensidades en los bordes de desprendimientos decrecen abruptamente debido a la presencia de la estela, llegando a valores nulos en régimen estacionario y este problema no vuelve a presentarse.

Por otro lado, un segundo problema se presenta para pasos de tiempo posteriores a $t = 0$, cuando existe la estela. La estela está formada por filas de elementos que se agregan en cada paso. Las posiciones de los nodos que definen cada elemento en las filas agregadas en pasos anteriores son también actualizadas en cada paso. Normalmente, el desplazamiento de estos nodos entre un paso y otro es muy pequeño. La actualización de la posición de los nodos que conforman la red libre refinada facilita la posible ubicación de éstos en las cercanías de segmentos vorticosos que forman la estela del paso anterior (fig. 23).

Como cada segmento es una representación discreta, con vorticidad concentrada, de una porción de la red de vórtices continua, en sus cercanías se inducen velocidades no reales. Por éste motivo, el cálculo de la velocidad sobre un nodo en la posición actualizada ubicado muy próximo a un segmento vorticoso perteneciente a la estela del paso

anterior, produce valores enormes. De esta manera los nodos toman posiciones inverosímiles; como, por ejemplo, atravesando la superficie del cuerpo y violando la condición de no penetración (fig. 24).

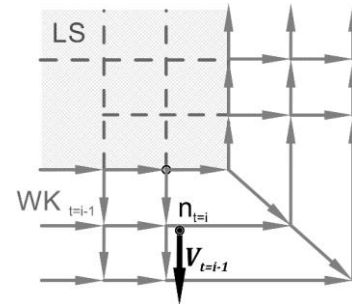


Fig. 23. Nodo en la posición actualizada en referencia a la estela del paso anterior.

Si bien, las velocidades inducidas por los segmentos vorticosos en el modelo adoptado son calculadas por la Ley de Biot-Savart con un núcleo suavizado, esto no es suficiente para eliminar el problema mencionado. La necesidad de considerar nodos que se ubican en estas posiciones críticas exige valores demasiados altos para el *cut-off*.

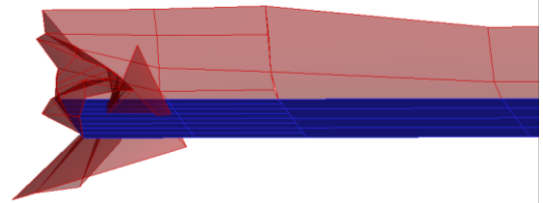


Fig. 24. Estela en el segundo paso - Método 1

A medida que la simulación avanza, en régimen estacionario la estela se estabiliza, lo cual implica que las posiciones de los nodos en las cercanías de la superficie sustentadora prácticamente no se modifiquen. Entonces, las posiciones de los nodos actualizados se confunden con las posiciones de los nodos pertenecientes a la estela del paso de tiempo anterior, y por lo tanto el problema tiende a desaparecer.

5) Método 2

El algoritmo de convección denominado Método 2 soluciona los problemas expuestos por el Método 1, pero sin embargo, como se puede observar en la fig. 25, los resultados no son mucho más prometedores que los anteriores. La razón radica en la forma que se asigna la vorticidad en las estelas intermedias.

En este método, la circulación asignada a los elementos de la estela intermedia proviene de los anillos vorticosos contiguos en la superficie sustentadora. Cuando se calculan las intensidades de los segmentos vorticosos que componen la estela intermedia surge un problema asociado a los segmentos que se encuentran en los bordes de la red adherida.

Estos segmentos reciben el aporte de los anillos vorticosos tanto de la superficie sustentadora como así también de la estela. Debido al proceso de asignación mencionado anteriormente, los segmentos vorticosos sobre

los bordes de desprendimiento pertenecientes a la zona refinada toman valores nulos (ver fig. 26).

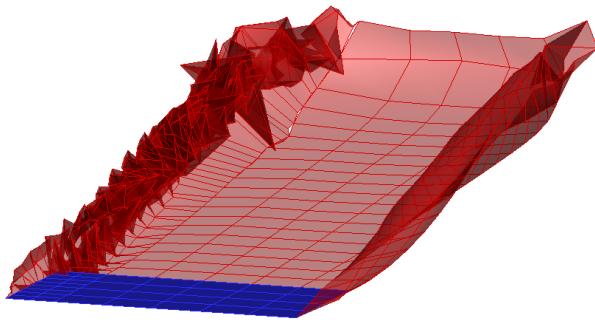


Fig. 25. Estela convectada con el Método 2.

El resultado es una estela que presenta quiebres en la zona refinada; producto de la pérdida de información producida por el mecanismo de asignación de circulación en las estelas intermedias (es decir, segmentos vorticosos nulos sobre los bordes de desprendimiento). Este problema empeora a medida que la estela evoluciona ya que estos segmentos de intensidad nula son arrastrados mientras la estela es convectada corriente abajo.

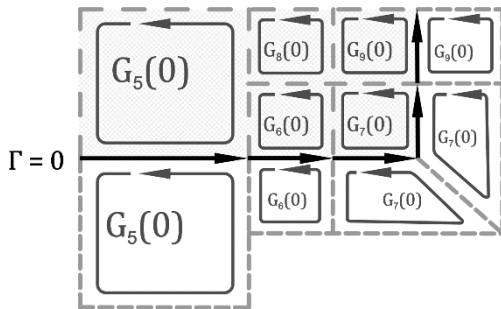


Fig. 26. Intensidades de los segmentos vorticosos en los bordes de la superficie sustentadora en una estela intermedia generada con el Método 2 de convección.

6) Método 3

Entre los tres esquemas de convección propuestos, el Método 3 es el que mejores resultados produce. En la fig. 27 se puede observar que la estela obtenida con éste método presenta un vórtice de puntera (zona refinada) mucho más suave, y además, una mayor resolución cuando se compara con simulaciones que utilizan mallas sin refinamiento.

Por otro lado, se puede ver que el vórtice de arranque presenta una pequeña deformación en la zona de transición, donde los elementos cambian de tamaño, debido a la diferencia de resolución. Sin embargo, esta deformación se acrecienta a medida que el vórtice de arranque se desarrolla, haciéndose notoria cuando éste se encuentra alejado de la superficie sustentadora, y por lo tanto, su influencia en la solución del problema aerodinámico es mínima.

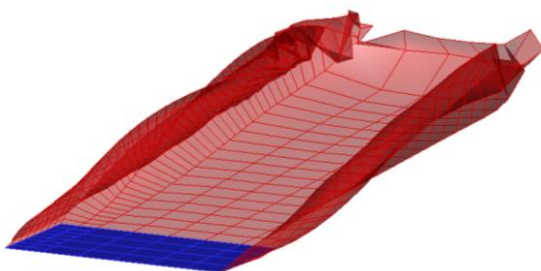


Fig. 27. Estela convectada con el Método 3.

Coefficiente de sustentación

Con el objetivo de validar las cargas aerodinámicas obtenidas con el esquema de refinamiento local propuesto en este trabajo utilizando el Método 3 de convección, se comparan valores del coeficiente de sustentación para el caso de estudio adoptado y para tres mallas diferentes. Esto es: *i*) un modelo de referencia, donde la placa es discretizada en 256 elementos, *ii*) una malla totalmente refinada, donde cada elemento es subdividido en 4, resultando 1024 elementos, y *iii*) una malla refinada localmente en una puntera.

La comparación se realiza en régimen estacionario. Se aclara que una longitud de cinco cuerdas alares para la estela es suficiente para evaluar el coeficiente de sustentación en estado estacionario (Verstraete *et al.*, 2015); es decir, a partir de este punto se puede despreciar el aporte de la estela restante en la solución del problema. Como se define el tiempo adimensional en función del tamaño de los elementos de la red, es necesario considerar el doble de la cantidad de pasos de tiempo para el caso de la malla totalmente refinada. Acorde a las mallas adoptadas, se comparan los C_L correspondientes a los paso de tiempo 80 para la malla de referencia y localmente refinada y 160 para la malla refinada globalmente. Las diferentes curvas obtenidas se presentan en la fig. 28.

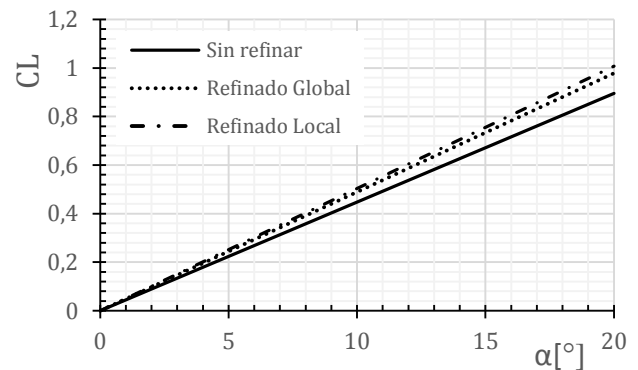


Fig. 28. Curvas de sustentación obtenidas con diferentes redes.

Además, a modo de referencia se calculan las pendientes de sustentación predichas con cada modelo y se las compara con el valor teórico, proveniente de la teoría de superficie sustentadora de envergadura finita, dada por la siguiente expresión:

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{AR}{AR + 2} \tag{24}$$

donde AR representa el alargamiento de la superficie sustentadora. La Tabla 1 muestra las estimaciones de $C_{L\alpha}$ obtenidas con el modelo teórico y provenientes de las simulaciones numéricas realizadas para cada una de las tres mallas.

TABLA 1. Valores de $C_{L\alpha}$ obtenidos con los diferentes modelos y su error respecto al valor teórico.

Modelo	$C_{L\alpha}$	Error
Teórico	0.0548	–
Malla Referencia	0.0448	18 %
Refinado Global	0.0489	11 %
Refinado Local	0.0504	8 %

Se puede observar que el valor obtenido con la malla refinada localmente difiere ligeramente de los valores

obtenidos con las redes uniformemente discretizadas. Esto se debe, probablemente, a las pequeñas perturbaciones introducidas por la interacción entre mallas de diferente tamaño en la zona de transición; hecho que produce, como se mencionó anteriormente, pequeñas variaciones en las intensidades de los segmentos vorticosos verticales que se encuentran en la frontera entre ambas mallas.

Tiempos de procesamiento

Uno de los principales objetivos que motivaron la inclusión de un esquema de refinado local es el de reducir el tiempo de procesamiento. La Tabla 2 muestra los tiempos de cómputo para las mallas utilizadas en la sección anterior. Se debe recordar que el método de convección empleado es el referido como Modelo 3, siendo el único que produjo resultados satisfactorios en lo que respecta a la descripción espacial de la estela.

La generación de sub-pasos de tiempo puede llevar a pensar, equivocadamente, que el método de refinado local no aporta ventajas, en término de costo computacional, frente al método clásico utilizando una malla globalmente refinada. Si bien, la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (13) puede requerir un tiempo de cálculo importante, el proceso que mayor tiempo consume es la convección de la estela. En el algoritmo propuesto, el tiempo de convección se reduce debido a que las estelas intermedias no consideran la actualización de las posiciones de los nodos que pertenecen a los elementos más grandes. Además, el tamaño del sistema lineal a resolver se reduce ya que el número de elementos en la red adherida es menor, comparada con una malla refinada globalmente.

TABLA 2. Tiempos de procesamiento.

Modelo	Núm. de pasos	Núm. de elementos	Tiempo de procesamiento
Malla Referencia	80	256	3 min 5 seg
Refinado Global	160	1024	88 min 49 seg
Refinado Local	80	352	19 min 31 seg

Las simulaciones numéricas se realizaron en un ordenador personal con un procesador Intel Core i3 M37 con dos núcleos de velocidad de 2,40Ghz, 3Mb de cache y 4 Gb de RAM.

En resumen, el uso de un esquema de refinado local permite reducir los tiempos de procesamiento en comparación con un refinado global. Específicamente, en el caso evaluado, se obtuvo una gran resolución sobre el vórtice de puntera con una reducción total en el tiempo de cómputo de cinco veces.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo se introdujo una modificación del método UVLM con el fin de incorporar redes refinadas localmente. La ausencia de trabajos previos sobre este aspecto ha requerido que varios aspectos sean analizados para lograr este objetivo.

El primero de ellos fue la introducción del concepto de densidad de vorticidad para permitir la comparación de las intensidades de los segmentos vorticosos en una red con diferentes refinados.

Otro aspecto, tal vez el más importante, sobre el que se trabajó fue el desarrollo de un método de convección eficiente. Para ello, varias alternativas fueron propuestas,

solucionando en cada una de ellas las diferentes dificultades que se presentaron. De esta forma se llegó a obtener lo que se denominó Método 3 de convección que, no solo permite trabajar con mallas refinadas localmente, sino también obtener una descripción precisa de la estela.

Desde el punto de vista de los resultados, se han encontrado algunas dificultades al momento de determinar las intensidades de los segmentos vorticosos que se encuentran en la frontera de dos refinados dentro de la misma red. Estas pueden relacionarse con las pequeñas variaciones en los valores de C_L obtenidos, y queda como unos de los puntos a mejorar en el método.

Sin embargo, y a pesar de estas dificultades, los resultados obtenidos muestran una excelente estimación de las cargas sobre la superficie sustentadora. Además, se ha obtenido un importante decremento en el costo computacional; hecho reflejado en una reducción de tiempo de 5 veces para el caso de estudio adoptado, comparado con el refinado global.

Trabajos futuros relacionados a esta línea de investigación deben incluir, sin duda, el desarrollo de técnicas de refinamientos locales heterogéneos. La implementación futura de este tipo de modelos permitirá ampliar enormemente la complejidad de los problemas a atacar, ya que se podrán desarrollar redes con elementos de diferentes tamaños, sin generar discontinuidades abruptas en la discretización. Una evolución de este mismo concepto está asociado al desarrollo de redes de vórtices adaptativas.

Finalmente, este trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de mayor envergadura realizado en conjunto por la UNC, UNRC y la Universidad de Maryland, USA, con el objetivo de estudiar la aerodinámica y aeroelasticidad de estructuras altamente deformables que experimentan movimientos complejos en el espacio y sumergidas en un flujo subsónico, tales como, micro vehículos aéreos inspirados en la biología y aeronaves basadas en el paradigma *morphing-wings*. El estudio de estas aeronaves está caracterizado por fenómenos físicos que ocurren a muy diferentes escalas temporales y espaciales. El desarrollo de procedimientos numéricos como el expuesto en este trabajo permitirá reducir el tiempo de simulación asociado a éstas aplicaciones noveles.

REFERENCIAS

- [1] Chorin, A. J. (1994), *Vorticity and Turbulence*, New York, USA: Springer-Verlag.
- [2] Døssing, M. (2007), *Vortex Lattice Modelling of Winglets on Wind Turbine Blades*, Master's thesis. Risø National Laboratory, Technical University of Denmark, Roskilde, Denmark.
- [3] Fritz, T. E., and Long, L. N. (2004), "Object-Oriented Unsteady Vortex Lattice Method for Flapping Flight," *Journal of Aircraft*, Vol. 41(6) pp. 1275-1290.
- [4] Ghommem, M., Hajj M. R., Watson T. L., Mook, D. T., Snyder R. D., and Beran, P. S. (2010), "Deterministic Global Optimization of Flapping Wing Motion for Micro Air Vehicles". In *13th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis Optimization Conference*. AIAA, pp. 1-13.
- [5] Ghommem, M., Hajj, M. R., Mook, D. T., Stanford, B. K., Beran, P. S., Snyder, R. D., and Watson, L. T. (2012), "Global Optimization of Actively Morphing Flapping Wings," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 33, pp. 210-228.
- [6] Kandil, O. A., Mook, D. T., Nayfeh, A. H. (1976), "Nonlinear Prediction of the Aerodynamic Loads on Lifting Surfaces," *Journal of Aircraft*, Vol. 13, pp. 22-28.

- [7] Konstadinopoulos, P., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H. (1981), "A Numerical Method for General Unsteady Aerodynamics", *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, AIAA-81-1877*, Albuquerque, New Mexico.
- [8] Murua, J., Palacios, R., Graham J. M. R. (2010), "Assessment of Wake-Tail Interference Effects on the Dynamics of Flexible Aircraft," *AIAA Journal*, Vol. 50(7) pp. 1575–1585.
- [9] Prandtl, L., Tietjens, O. G. (1957), *Applied Hydro- and Aeromechanics*. Dover Publications Inc., New York
- [10] Obradovic, B., Subbarao, K. (2011), "Modeling of Flight Dynamics of Morphing-Wing Aircraft," *Journal of Aircraft*, Vol. 48(2), pp. 391-402.
- [11] Preidikman, S. (1998), *Numerical Simulation of Interactions among Aerodynamics, Structural Dynamics, and Control Systems*. Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech.
- [12] Randos, K., Larsen, G., Barthelmie, R. Schlez, W., Lange, B., Schepers, C., Hegberg, T., Magnisson, M. (2001), "Comparison of Wake Models with Data for Offshore Wind Farms," *Wind Engineering*, vol. 25(5), pp. 71-80.
- [13] Rocca, B. A., Preidikman, S., Massa, J. C., Mook, D. T. (2013), "A modified unsteady vortex-lattice method to study flapping wings in hover flight," *AIAA Journal*, Vol. 51(11), pp. 2628-2642.
- [14] Rötgermann, A., Behr, R., Schöttl, C., Wagner, S. (1992), "Calculation of blade-vortex interaction of rotary wings in incompressible flow by an unsteady vortex- lattice method including free wake analysis," *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 33, pp. 153-66
- [15] Stanford, B. K., Beran, P. S. (2010), "Analytical Sensitivity Analysis of an Unsteady Vortex-Lattice Method for Flapping-Wing Optimization," *Journal of Aircraft*, Vol. 47(2), pp. 647–662.
- [16] Stanford, B. K., Beran, P. S. (2011), "Formulation of Analytical Design Derivatives for Nonlinear Unsteady Aeroelasticity," *AIAA Journal*, Vol. 49(3), pp. 598–610
- [17] Verstraete, M. L., Preidikman, S., Rocca, B. A., Mook, D. T. (2015), "A numerical model to study the nonlinear and unsteady aerodynamics on a bioinspired morphing wing concept," *International Journal of Micro Air Vehicles*, Vol. 7(3), pp. 327-345.
- [18] Wang, Z, Chen, P. C., Liu, D. D., Mook, D. T., Patil, M. J. (2006), "Time Domain Nonlinear Aeroelastic Analysis for HALE Wings," *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pp. 1–19
- [19] Wie, S. Y., Lee, S., Lee, D. J. (2009), "Potential Panel and Time-Marching Free-Wake Coupling Analysis for Helicopter Rotor," *Journal of Aircraft*, Vol. 46(3), pp. 1030-1041.