

Simulación de Flujos Supersónicos Bidimensionales y Axialmente Simétricos con OpenFOAM®

Denis Lorenzon^{1,2} y Sergio A. Elaskar^{1,2}

¹Departamento de Aeronáutica, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina

²CONICET – Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Buenos Aires, Argentina

Fecha de recepción del manuscrito: 04/05/2015

Fecha de aceptación del manuscrito: 22/08/2015

Fecha de publicación: 15/09/2015

Resumen— El exponencial crecimiento de la capacidad de cálculo computacional y el continuo desarrollo de esquemas numéricos han hecho de las simulaciones numéricas una importante herramienta para el estudio del comportamiento de los fluidos. Una alternativa para afrontar un problema mediante la Mecánica de los Fluidos Computacional es utilizar paquetes de libre distribución tales como OpenFOAM®, el cual ha tenido gran difusión y aceptación en los últimos años. En el presente trabajo se ponen a prueba las capacidades y limitaciones de OpenFOAM® en la resolución de la estructura de flujos transónicos y supersónicos en torno a geometrías bidimensionales y con simetría axial, que son de interés para una gran variedad de aplicaciones prácticas, a saber: la cuña bidimensional y el cono circular paralelo a la corriente. A estos efectos, se pone especial atención en la generación de las mallas donde la densidad de éstas se define mediante experimentos de convergencia. Se compara el desempeño de dos *solvers* incluidos en el paquete, *sonicFoam* y *rhoCentralFoam*, siendo este último el que posee mejores prestaciones por lo cual es utilizado para realizar simulaciones de flujo cónico dentro de un amplio rango de números de Mach. Con base en los resultados obtenidos se concluye que OpenFOAM® ofrece un conjunto de herramientas no sólo prácticas sino también confiables para el estudio del tipo de flujos considerado.

Palabras clave— Flujo supersónico, simulación numérica, OpenFOAM®, cuña, cono circular, flujo cónico, ondas de choque.

Abstract— The computational power growth and the continuous development of numerical schemes have become numerical simulations a valuable tool in the study of fluids behavior. One choice to face a problem through the Computational Fluid Dynamics is the usage of free software packages such as OpenFOAM®, which has had remarkable diffusion and acceptance in the last times. In this paper, OpenFOAM® capabilities for the simulation of transonic and supersonic flows are tested using meaningful 2D and axially symmetric 3D geometries, i.e., the two-dimensional wedge and the sharp circular cone at zero angle of attack. For this purpose, special attention is paid to the mesh generation where the meshes densities are established through convergence tests. A comparison between two solvers included within the package, *sonicFoam* and *rhoCentralFoam*, is made. Better results were obtained with the later, therefore it is used to carry out several conical flow simulations considering a wide range of Mach numbers. From the achieved results, it is asserted that OpenFOAM® provides a set of practical and reliable tools for the study of transonic and supersonic flows.

Keywords— Supersonic flow, numerical simulation, OpenFOAM®, wedge, sharp circular cone, conical flow, shock waves.

INTRODUCCIÓN

Cuando se aborda un problema fluido-dinámico se tienen, en principio, tres caminos: el análisis matemático, las mediciones empíricas y la simulación.

Las formulaciones matemáticas más generales que describen la dinámica de los fluidos, tales como las Ecuaciones de Navier-Stokes, se han mantenido invariantes por casi dos siglos, sin embargo presentan el gran inconveniente de formar, en conjunto, un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales acopladas, cuya solución analítica resulta inviable excepto para casos muy particulares. Estas soluciones cerradas que pueden conseguirse son útiles para mejorar nuestra comprensión

sobre el comportamiento de los fluidos, pero su aplicabilidad a problemas ingenieriles es muy limitada.

La experimentación es fundamental en todas las áreas de la ingeniería. En el caso particular de la Ingeniería Aeroespacial, la principal desventaja que presentan actualmente los ensayos en túnel de viento es que son altamente costosos, especialmente si se trata de ensayos de flujo supersónico. Por otro lado, existen innumerables situaciones donde la experimentación no es factible por razones técnicas o tecnológicas.

Por su parte, la simulación numérica es en la actualidad una de las principales herramientas para el cálculo y diseño en el campo de la Ingeniería Aeroespacial, dado que permite abordar problemas cuyo estudio no era posible pocas décadas atrás y, además, a lo largo de su desarrollo ha probado ser un método eficaz, preciso, robusto y sumamente flexible (Falcinelli et al., 2008; Gutierrez et al., 2015; Saldía et al., 2015). Si se desea afrontar un problema mediante la Mecánica de los Fluidos Computacional

Dirección de contacto:

Denis Lorenzon, Boulevard Chacabuco 1240, Córdoba, X5000IIZ, Tel: +54 9 351 744-7081, denis.lorenzonz@gmail.com

(CFD), se tienen en general tres opciones: adquirir un software comercial (ANSYS Fluent, COMSOL Multiphysics, etc.), crear un código nuevo o utilizar paquetes de libre distribución (Dolfin, OpenFOAM, entre otros). Programar un código para simulación de flujos requiere mucho tiempo y conocimientos específicos sobre programación, métodos numéricos y sobre la física involucrada. Algunos paquetes comerciales posibilitan obtener excelentes resultados, pero son muy costosos y tienen el inconveniente, a diferencia de los de libre distribución, de que no permiten realizar modificaciones.

El paquete libre OpenFOAM® es un conjunto de librerías programadas en C++ (OpenCFD, 2013) que ha tenido gran difusión y aceptación en los últimos años tanto a nivel académico como industrial, ya que presenta una variedad remarcable de esquemas de discretización y solución, además de herramientas para pre- y post-procesamiento (OpenCFD, 2014a). OpenFOAM® utiliza el método de los volúmenes finitos en la discretización del dominio físico y de las ecuaciones de gobierno. Éste se basa en dividir el espacio de cálculo en un conjunto de volúmenes de control o celdas sobre los cuales se aplican las leyes de conservación. En los esquemas implementados en este trabajo, las variables del problema se promedian en cada celda asignando el valor a su punto central.

Las ecuaciones que describen cada tipo de problema son diferentes así como también lo son los sistemas de resolución o *solvers* correspondientes. Además de numerosos *solvers*, OpenFOAM® incluye otras aplicaciones o utilidades que, a través de operaciones aritméticas, facilitan la preparación del modelo discreto y el análisis de los resultados.

El objetivo principal del presente trabajo es poner a prueba las capacidades y limitaciones de OpenFOAM® a la hora de estudiar la estructura de flujos transónicos y supersónicos. Para perseguir el objetivo general, se simulan casos elementales de flujos bidimensionales y tridimensionales con simetría axial, a saber: el flujo sobre una cuña bidimensional y sobre un cono circular sin ángulo de ataque. A tales efectos, se adopta como herramienta de mallado la utilidad *blockMesh* y se emplean dos de los *solvers* que incluye OpenFOAM® para flujo compresible, *sonicFoam* y *rhoCentralFoam*. Los casos particulares de flujo que aquí se estudian pueden tomarse como punto de partida para el estudio de flujos más complejos tales como alrededor de conos con ángulo de ataque, conos elípticos, cilindros con extremo cónico y demás geometrías similares.

La importancia del flujo supersónico en torno a una cuña bidimensional y a un cono circular radica en que son casos ampliamente estudiados que sirven de interés para una gran variedad de aplicaciones prácticas, como fuselajes de aeronaves supersónicas, perfiles supersónicos, álabes de turbina, cohetes, misiles, estatoreactores, proyectiles, tomas de aire supersónicas, toberas y difusores, entre otras.

Aunque interesan sólo dos coordenadas espaciales en el flujo axialmente simétrico, los problemas que se afrontan son mayores que en el caso de la cuña dado que se trata, en esencia, de un flujo tridimensional. Asimismo, la naturaleza física de ambos tipos de flujo es diferente.

Como instrumentos de validación para las simulaciones existen desarrollos analíticos y puede encontrarse en la bibliografía específica una vasta diversidad de resultados numéricos (Kutler y Lomax, 1971; Sims, 1964; Dailey y

Wood, 1949) y experimentales que datan desde principios de la década de 1930 (Tracy, 1964; Feldhuhn et al., 1971; Rainbird, 1968; Yahalom, 1971). El caso bidimensional se verifica mediante la teoría de ondas de choque oblicuas (Shapiro, 1953; Anderson, 2001) y una solución muy útil verificada experimentalmente para el flujo en torno a un cono circular paralelo a la corriente es la propuesta por Taylor y Maccoll (Taylor y Maccoll, 1933a; 1933b).

El proceso de integración de Taylor y Maccoll puede resultar en un flujo detrás de la onda totalmente supersónico o subsónico, pero también puede presentarse el caso de que entre la onda de choque y la superficie del cono se produzca la transición desde supersónico a subsónico. Tanto en la teoría como en la práctica, se observa que esta transición se realiza sin ondas de choque y se trata de uno de los pocos casos donde se verifica un flujo transónico continuo que ha sido comprobado experimentalmente.

CASOS DE PRUEBA

En primer lugar es indispensable definir las geometrías cuyos flujos se desean analizar, las mallas que servirán de dominio para el cálculo, las condiciones de frontera requeridas, las propiedades del modelo termofísico y el *solver* a emplear.

Se consideran dos casos típicos de flujo supersónico, la cuña bidimensional y el cono circular paralelo a la corriente, los cuales son simulados dentro de un moderado rango de números de Mach, usando mallas de diferentes resoluciones, y aplicando los dos *solvers* mencionados anteriormente. Con base en estas simulaciones de prueba se evalúa la convergencia de las mallas y se elige de entre ambos *solvers* propuestos el de mejores prestaciones, teniendo en cuenta que éstos son aplicados sin modificación alguna de los esquemas de discretización o solución.

La cuña es un problema característico de flujo supersónico bidimensional. La presencia del obstáculo fuerza un abrupto cambio de dirección en la velocidad del flujo generándose una onda de choque oblicua con origen en el vértice de la cuña. Todas las propiedades del flujo a uno y otro lado de la onda son constantes (véase Fig. 1). El equivalente tridimensional de la cuña es el cono paralelo a la corriente, no obstante la estructura del flujo es diferente. Desde el vértice del cono emerge una onda de choque cónica y el flujo entre ésta y la superficie experimenta una compresión isentrópica, además, las perturbaciones introducidas por el objeto a igual ángulo de apertura son menos severas que en el caso bidimensional.

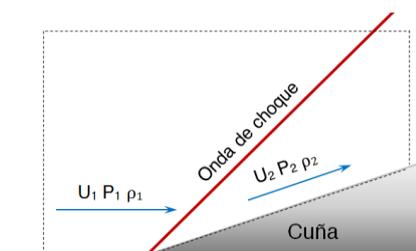


Fig. 1: Problema de la cuña bidimensional.

El dominio espacial del modelo físico se extiende indefinidamente, sin embargo, en el modelo discreto es necesario establecer los límites a una distancia finita de la cuña (representados por la línea de trazos en la Fig. 1) y

aplicar sobre ellos las condiciones de contorno que correspondan. Un razonamiento idéntico se aplica al caso del cono paralelo a la corriente.

Generación de las mallas

Uno de los primeros pasos en el cómputo de una solución numérica es la construcción de la malla, la cual debe cubrir completamente el dominio físico continuo de manera que puedan ser identificados los volúmenes discretos donde las leyes de conservación son aplicadas. Una malla de buena calidad notablemente mejora la precisión de la solución y, por el contrario, una malla pobremente construida generalmente desemboca en un resultado pobre. OpenFOAM® verifica que la malla satisfaga un conjunto de rigurosas condiciones de validez y dejará de correr en el caso de que las restricciones no se verifiquen. OpenFOAM® fue diseñado para soportar mallas no estructuradas compuestas por cualquier tipo de celdas poliédricas tridimensionales.

Dada la simplicidad de las geometrías a estudiar, se utiliza como herramienta de mallado la utilidad *blockMesh*, la cual permite generar mallas estructuradas por bloques. Para las simulaciones posteriores es muchas veces necesario aplicar una serie de sucesivas modificaciones geométricas menores en las mallas y esto puede hacerse de forma rápida y sencilla con *blockMesh*.

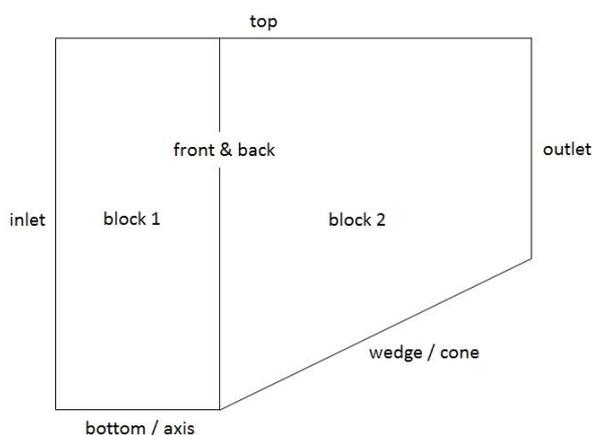


Fig. 2: Esquema del dominio de cálculo para la cuña bidimensional y el cono con simetría axial.

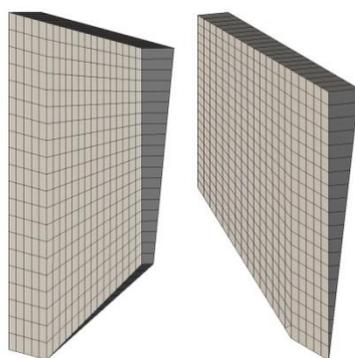


Fig. 3: Malla estructurada por bloques para el cono con simetría axial generada con *blockMesh* (resolución esquemática).

Tanto para la cuña bidimensional como para el cono con simetría axial interesan sólo dos coordenadas espaciales, no obstante las mallas que se utilizan en ambos casos son

estructuradas con dos bloques de celdas hexaédricas constando de una profundidad de una celda. Esto se debe a que los problemas que resuelve OpenFOAM® son siempre tridimensionales, pero permite simplificar el tratamiento de problemas bidimensionales y axialmente simétricos mediante la utilización de mallas de una celda de profundidad donde se aplica sobre las caras anteriores y posteriores las condiciones *empty* o *wedge*, según corresponda (notar las condiciones aplicadas a los parches *front & back* en la Tabla 1). En la Fig. 2 se esquematiza el dominio espacial para los casos mencionados y se indica la nomenclatura concedida a cada una de las caras a los fines de asignar las condiciones de contorno. Dos vistas ilustrativas de las mallas generadas para el cono con simetría axial pueden verse en la Fig. 3.

Condiciones de contorno

La aplicación de las condiciones de borde es un aspecto muy importante, ya que de ello depende la convergencia y la estabilidad de la solución numérica. Como sólo es posible considerar dominios finitos, las condiciones deben fijarse sobre superficies que se encuentran a una distancia finita del objeto en estudio.

OpenFOAM® permite asignar para cada variable y sobre cada contorno, alguna de las numerosas clases pre-programadas que representan diferentes tipos de condiciones. A la hora de construir la malla con *blockMesh*, la superficie exterior del dominio se divide en una serie de conjuntos de caras o parches a los efectos de la aplicación de dichas condiciones. En la Tabla 1 se muestran las condiciones designadas a cada variable sobre los respectivos contornos indicados en la Fig. 2. Las condiciones de las secciones de entrada (*inlet*) son del tipo *fixedValue* y su valor numérico es el especificado en la tabla. Al aplicar *slip* sobre una variable vectorial, se está imponiendo la condición de no penetración, es decir que la componente normal a la cara es de tipo *fixedValue* e igual a cero. *zeroGradient* significa que el gradiente de la variable en la dirección normal a la cara es nulo.

TABLA 1: CONDICIONES DE CONTORNO.

Contorno	P [Pa]	T [K]	U [m/s]
Cuña bidimensional			
inlet	101325	288.15	($M_{1a}, 0, 0$)
outlet	waveTransmissive	zeroGradient	zeroGradient
bottom	symmetryPlane	symmetryPlane	symmetryPlane
top	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
wedge	zeroGradient	zeroGradient	slip
front & back	empty	empty	empty
Cono con simetría axial			
inlet	101325	288.15	($M_{1a}, 0, 0$)
outlet	waveTransmissive	zeroGradient	zeroGradient
axis	empty	empty	empty
top	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
cone	zeroGradient	zeroGradient	slip
front & back	wedge	wedge	wedge

La condición *empty* se aplica sobre las caras cuyas normales coinciden con una dirección sobre la cual no se desea computar la solución, y la condición *wedge* se emplea para las caras anteriores y posteriores de geometrías con

simetría axial. Si sobre las secciones de salida el flujo fuera completamente supersónico bastaría la condición *zeroGradient*, dado que interpolar el campo desde el interior del dominio resultaría suficiente, no obstante, se simulan casos donde el campo de velocidades saliente es combinado subsónico-supersónico, por lo que se emplea *waveTransmissive*, la cual provee un estado no reflexivo de transmisión de ondas de presión sobre la frontera (OpenCFD, 2014b; Poinso y Lele, 1992).

Propiedades del modelo termofísico

En correspondencia con las hipótesis de las teorías de ondas de choque oblicuas y del flujo en torno a un cono circular, empleada por Taylor y Maccoll, se considera que el fluido se comporta como un gas calorífico perfecto, es decir, que los calores específicos se mantienen constantes. Si bien los *solvers* a utilizar permiten abordar problemas considerando la viscosidad molecular y turbulencia, aquí se restringe al problema como no viscoso imponiendo un valor nulo al coeficiente de viscosidad dinámica y, en efecto, todos los términos de origen viscoso en las ecuaciones de transporte no son tenidos en cuenta. Por lo tanto, las ecuaciones que se resuelven para representar el comportamiento del flujo son las ampliamente conocidas ecuaciones de Euler de la dinámica de gases. Esta simplificación es coherente con los desarrollos teóricos basados en modelos no viscosos que se usan como medios de comparación. Claramente, cualquier efecto disipativo en los resultados tiene origen numérico y no físico.

El balance energético puede realizarse en términos de la energía interna o de la entalpía, la cual a su vez, puede contener la entalpía de formación o no. La forma de energía que se usa aquí es la energía interna ya que algunas corridas de prueba indican que si se utiliza la entalpía, la precisión en los resultados disminuye notablemente. La Tabla 2 revela la entrada de datos para el modelo termofísico a utilizar en todas las simulaciones realizadas. En la parte inferior de la Tabla 2, se muestran las propiedades asignadas al fluido, llamado aquí como *mixture*. Estos valores se corresponden con los de la atmósfera estándar al nivel del mar, con la diferencia de que se anulan el calor de formación y la viscosidad de acuerdo con las hipótesis establecidas. El número de Prandtl representa la relación entre la difusión viscosa y la difusión de calor, las cuales se asumen ambas como nulas. Por ello se le asigna un valor unitario para evitar posibles conflictos numéricos.

TABLA 2: ENTRADAS DE DATOS PARA EL MODELO TERMOFÍSICO.

thermoType		
Modelo termofísico	type	hePsiThermo
Propiedades de la mezcla	mixture	pureMixture
Propiedades de transporte	transport	const
Propiedades termofísicas	thermo	hConst
Ecuación de estado	equationOfState	perfectGas
Especie	specie	specie
Forma de energía utilizada	energy	sensibleInternalEnergy
mixture (Aire bajo condiciones estándar no viscoso)		
Número de moles	nMoles	1
Peso molecular	molWeight	28.965
Calor específico a P constante	Cp	1004.685
Entalpía de formación	Hf	0
Viscosidad dinámica	mu	0
Número de Prandtl	Pr	1

Convergencia de las mallas

Desde la perspectiva de la discretización geométrica, se dice que un método numérico es convergente si la solución a las ecuaciones discretizadas se aproxima a la solución exacta en la medida que se refina la malla.

La malla a utilizar debe tener la suficiente densidad de celdas para garantizar una buena calidad de los resultados pero, a su vez, no debe ser demasiado fina para que las corridas no demanden un tiempo excesivo de CPU. El experimento numérico se realiza comenzando con una malla relativamente gruesa, la cual se refina gradualmente hasta que la variación en los resultados no es significativa y luego se adoptan densidades similares para todas las simulaciones subsecuentes. Para proceder se emplea el *solver rhoCentralFoam* con las geometrías y condiciones de contorno detalladas anteriormente. La velocidad del flujo sin perturbar se mantiene en 680.6 m/s ($M_1 = 2$) para el caso de la cuña bidimensional y 442.4 m/s ($M_1 = 1.3$) para el cono. En ambos casos, el semi-ángulo de apertura del obstáculo se fija en 0.349 (20°). La Tabla 3 sintetiza las características de tres de las corridas de prueba efectuadas para evaluar la densidad de las mallas.

TABLA 3: SÍNTESIS DE LAS MALLAS PARA LA PRUEBA DE CONVERGENCIA.

Designación	Número de celdas
gruesa	6 400
media	25 600
fina	57 600

En principio, el paso de tiempo para cada corrida se elige bajo la restricción de que el número de Courant (*Co*) no exceda la unidad, no obstante, se observa que aun cuando la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (*CFL*) (Courant et al., 1928) se verifica en todas las celdas, las soluciones obtenidas son de baja calidad en el sentido de que aparecen en las variables del flujo leves oscilaciones espurias las cuales desaparecen al reducir el tamaño de los pasos de tiempo de tal manera que *Co* no supere 0.2.

La Fig. 4 muestra las mejoras en la calidad de los resultados debidas al refinamiento de la malla y puede apreciarse una marcada convergencia de la solución numérica hacia la solución de Taylor y Maccoll.

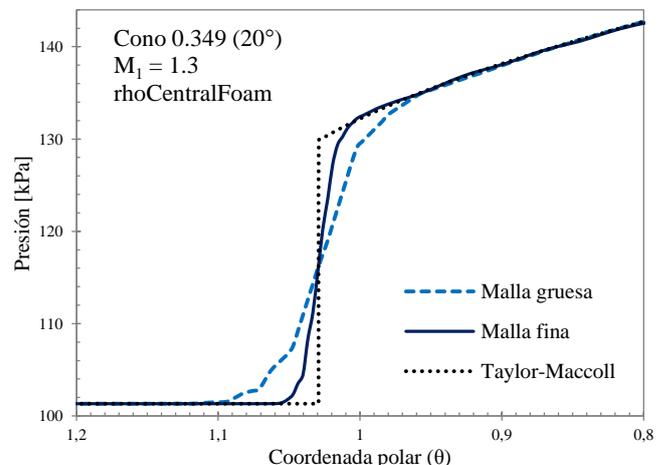


Fig. 4: Convergencia de las mallas. Detalle de la captación de la onda de choque cónica en términos del campo de presiones.

El pos-procesamiento de los casos de prueba revela que para mallas más densas que la denominada *media*, las

variaciones en los resultados obtenidos son muy sutiles con respecto al ángulo e intensidad de la onda de choque, pero apreciables en lo que concierne al espesor de ésta. Por ello y teniendo en consideración que el tiempo de duración de cada corrida no es excesivo, se eligen para las simulaciones previstas resoluciones de malla similares a la denominada *fina*.

Comparación entre “solvers”

Las ecuaciones en derivadas parciales que OpenFOAM® trata a nivel discreto son las ecuaciones de gobierno de los problemas descritos en el artículo las cuales representan las leyes de conservación generales de la dinámica de gases. Las variables que se obtienen de resolver cada una de las ecuaciones de transporte se denominan *variables primitivas*. Normalmente si una de estas variables es la densidad debido a la ecuación de continuidad, se dice entonces que se trata de un método basado en la densidad. Si, en cambio, se deriva una ecuación independiente para la presión a partir de las ecuaciones de continuidad y de conservación de la cantidad de movimiento, es un método basado en la presión.

Ambos ejecutables, *sonicFoam* y *rhoCentralFoam*, se emplean para abordar problemas estacionarios usando las ecuaciones dependientes del tiempo, progresando en un tiempo virtual hasta que las variaciones relativas en las variables entre dos pasos de tiempo sucesivos caen por debajo de cierta tolerancia. El primero es un *solver* basado en la presión apto para la simulación de flujos transónicos y supersónicos, laminares o turbulentos, de gases. Este *solver* utiliza el algoritmo de solución PISO (*Pressure Implicit with Splitting of Operators*), el cual es un método no iterativo para resolver el acoplamiento presión-velocidad de las ecuaciones a nivel discreto (Issa, 1986; Ferziger y Milovan, 2002; Jasak, 1996). Por su parte, el segundo se trata de un *solver* basado en la densidad idóneo para la simulación de flujos subsónicos, transónicos y supersónicos, laminares o turbulentos, de gases compresibles, que utiliza los esquemas centrados de Kurganov y Tadmor (Kurganov y Tadmor, 2000).

A través de la simulación de unos pocos casos de prueba, tanto de la cuña bidimensional como del cono con simetría axial, se pretende comparar su desempeño y elegir, de entre ambos *solvers*, el de mejores prestaciones para ser utilizado en adelante en todas las simulaciones del presente trabajo. Para llevar a cabo la experiencia numérica se mantienen constantes el ángulo de la cuña y el semi-ángulo de apertura del cono, iguales a 0.349 (20°), y se simulan ambas geometrías a diferentes números de Mach con uno y otro *solver*.

Posteriormente, se procesan los resultados y se comparan con las teorías de ondas de choque oblicuas y de flujo cónico de Taylor y Maccoll, teniendo en cuenta que todos los parámetros de las simulaciones se dejan inalterados para que las diferencias resulten independientes de todo, a excepción del *solver* usado. Como criterios de comparación se adoptan el salto de presiones y temperaturas a través de la onda.

Las Figuras 5-a y b exponen, para la cuña de 20° a diferentes números de Mach iniciales, la variación de la presión estática al atravesar horizontalmente la onda de choque oblicua.

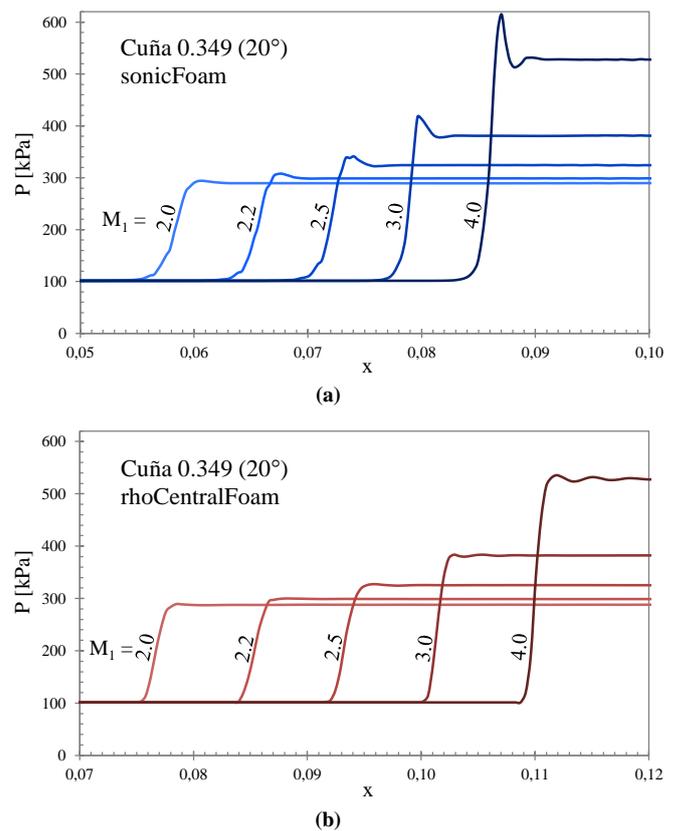


Fig. 5: Captación de la onda de choque oblicua. (a) *sonicFoam*. (b) *rhoCentralFoam*.

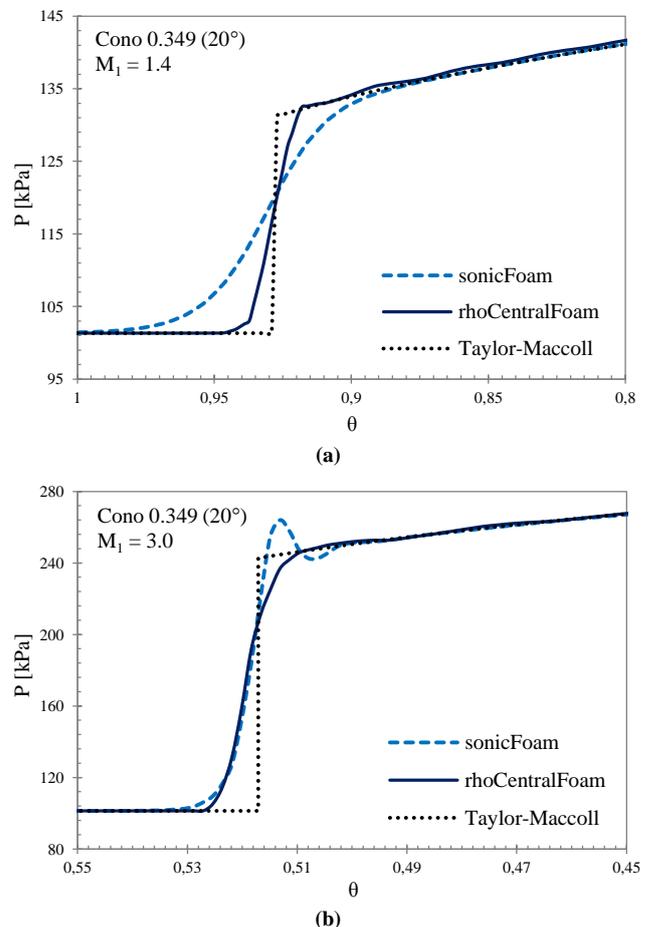


Fig. 6: Comparación entre *solvers* en términos de las variaciones de presión adyacentes a la onda de choque cónica. (a) $M_1 = 1.4$. (b) $M_1 = 3.0$.

Con base en los resultados obtenidos puede decirse que los dos *solvers* reproducen los resultados de la teoría de ondas de choque oblicuas de manera satisfactoria. Ambas predicciones acerca de la posición e intensidad de la discontinuidad son precisas, sin embargo, *sonicFoam* exhibe importantes oscilaciones en las proximidades de la onda, las cuales tienden a intensificarse conforme aumenta la severidad del choque (véase Fig. 5-a). En contraste, las inestabilidades observadas por el lado de *rhoCentralFoam* son menores aunque no despreciables (Fig. 5-b). En cuanto a la definición de la discontinuidad, ambos *solvers* incorporan cierta viscosidad numérica la cual genera disipación en las zonas de grandes gradientes, pero a simple vista puede decirse que el choque oblicuo está mejor definido en el campo de movimiento obtenido mediante *rhoCentralFoam* y es más difuso por el lado de *sonicFoam*, principalmente a bajos números de Mach.

Respecto del cono circular, las Figs. 6-a y b exponen la comparación con su contraparte analítica de los resultados obtenidos con uno y otro *solver*, en relación con la variación de la presión estática en función de la coordenada polar (θ) desde el campo sin perturbar hasta la superficie del obstáculo. En las Figs. 7-a y b se comparan las intensidades del choque proporcionadas por cada *solver* con las soluciones a la teoría de flujo cónico dentro del rango de números de Mach simulados.

La falta de definición y las oscilaciones de las variables del flujo en las proximidades de las zonas de fuertes gradientes están asociadas con los errores disipativos y dispersivos, respectivamente, de los esquemas numéricos. La acción combinada de la disipación y la dispersión es comúnmente referida como difusión (Tannehill et al., 1997).

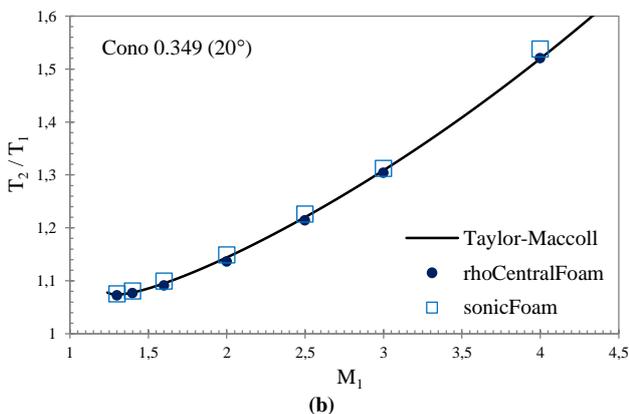
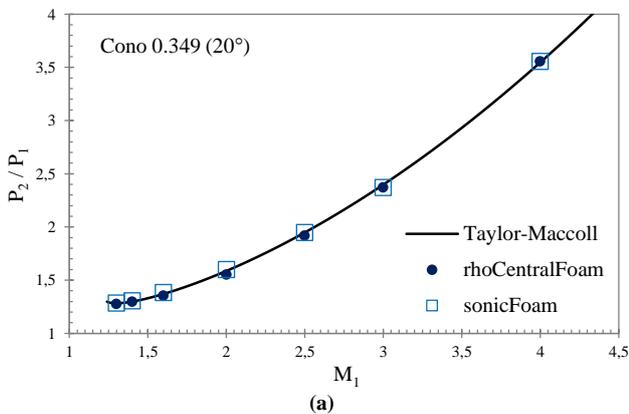


Fig. 7: Comparación entre *solvers* respecto de la intensidad de la onda de choque cónica. (a) Relación de presiones. (b) Relación de temperaturas.

En las Figuras 6-a y b se aprecia que el *solver rhoCentralFoam* muestra en general superioridad por sobre *sonicFoam* en lo que concierne a definición de las variables del flujo y a la aparición de inestabilidades en las proximidades de la discontinuidad. Estas oscilaciones acrecientan su amplitud al aumentar el número de Mach pero, a su vez, el espesor captado de la onda de choque disminuye con la velocidad del flujo, sustancialmente en lo que concierne a *sonicFoam*. Cabe aclarar que al aumentar el número de Mach, OpenFOAM® automáticamente modifica los pasos de tiempo de manera tal que no aumente el número de Courant. Respecto de la posición del choque cónico, ambos códigos proporcionan una predicción correcta. Las estimaciones sobre el salto de presiones (véase Fig. 7-a), y de temperaturas (Fig. 7-b) son también muy buenas. Una exposición más completa de resultados de esta comparación se puede hallar en (Lorenzon, 2014).

Considerando los resultados obtenidos hasta el momento, se encuentra que el *solver rhoCentralFoam* es el que presenta las mejores características para la simulación de flujos transónicos y supersónicos, razón por la cual es éste el utilizado en adelante para un estudio más detallado de flujos en torno a conos circulares.

RESULTADOS

SIMULACIÓN DE FLUJOS EN TORNO A CONOS SIN ÁNGULO DE ATAQUE

Se utilizan ahora las mallas construidas, las condiciones de contorno y propiedades termofísicas definidas, y el *solver rhoCentralFoam* para simular conos circulares de varios ángulos de apertura dentro de un amplio rango de números de Mach con el objetivo de contrastar las predicciones numéricas de OpenFOAM® con las soluciones a la teoría de flujo cónico de Taylor y Maccoll. La Tabla 4 lista las corridas efectuadas para cada semi-ángulo de cono.

El pos-procesamiento de los resultados consiste, en primera instancia, en definir la posición de la onda de choque y en evaluar los valores de presión, temperatura y velocidad detrás de ella y sobre la superficie del cono. La forma más conveniente de exponer los resultados es a través de gráficas que contrasten, en función del número de Mach de la corriente libre, los datos obtenidos de las simulaciones numéricas con las curvas teóricas.

TABLA 4: SIMULACIONES DE FLUJO CÓNICO REALIZADAS.

Cono	10°	20°	30°	40°	50°
	1.1	1.3	1.5	2.0	3.2
	1.2	1.4	1.6	2.1	3.3
	1.4	1.6	1.8	2.4	3.5
Números	1.6	2.0	2.4	3.0	4.0
de	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
Mach	2.5	3.0	4.0	5.0	
	3.0	4.0	5.0		
	4.0	5.0			
	5.0				

Para cada cono se analizan ocho variables: el ángulo de la onda de choque cónica, el número de Mach inmediatamente detrás de ésta, la relación de presiones estáticas y de presiones de estancamiento, el número de Mach sobre la superficie del cono, la relación de

compresión entre el choque y el obstáculo, la presión sobre la superficie adimensionalizada mediante la presión de estancamiento de la corriente sin perturbar y el coeficiente de resistencia por presión basado en el área de la base del cono. Mostrar aquí todos los resultados sería tedioso para el lector por lo cual se exponen únicamente algunos que se consideran relevantes. Todos los resultados mencionados han sido expuestos en el Proyecto Integrador de la carrera de Ingeniería Aeronáutica del primer autor (Lorenzon, 2014).

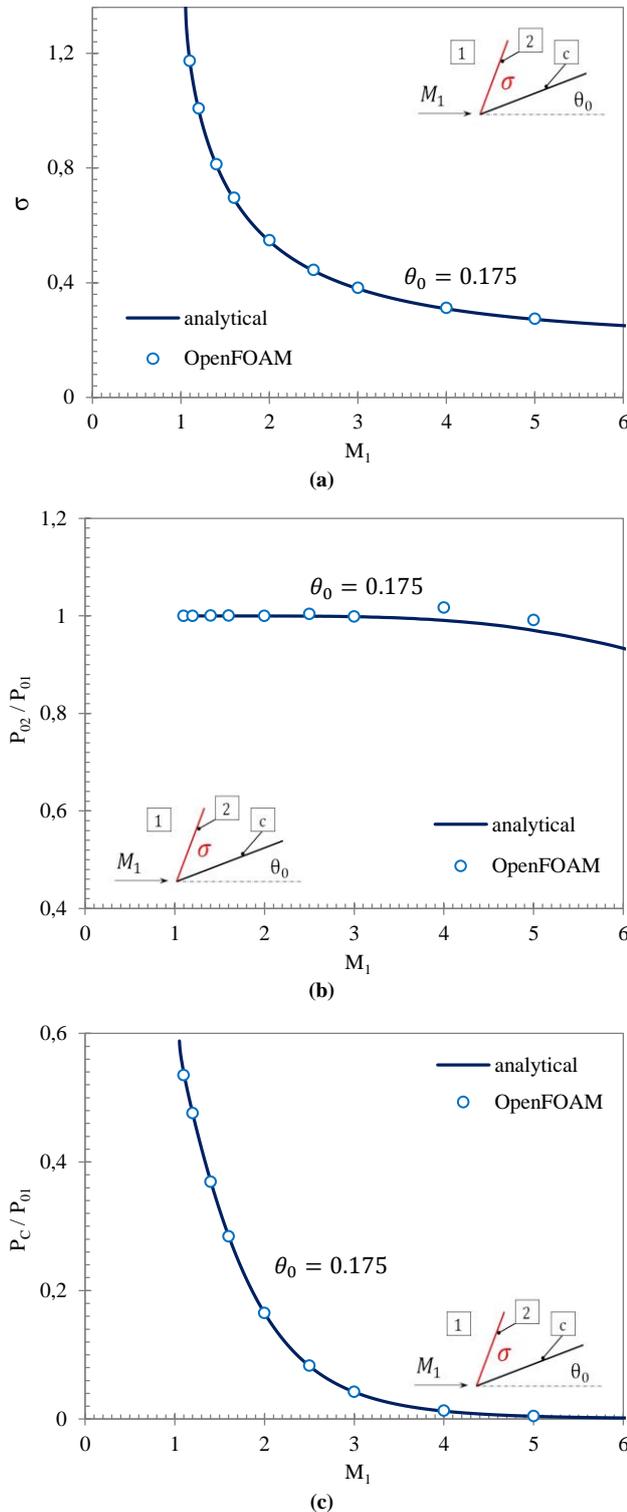


Fig. 8: Resultados para el cono de 10° en función del número de Mach. (a) Ángulo de la onda de choque cónica. (b) Relación de presiones de estancamiento. (c) Presión sobre la superficie del cono adimensionalizada.

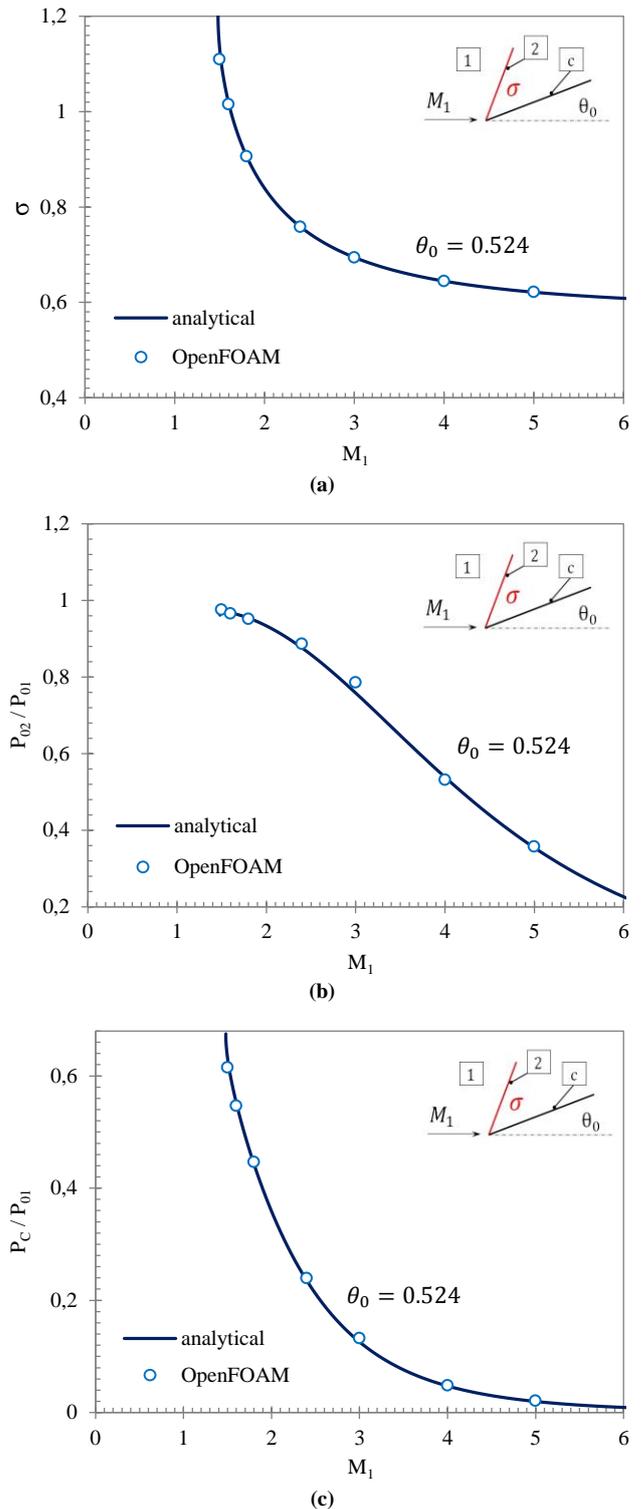


Fig. 9: Resultados para el cono de 30° en función del número de Mach. (a) Ángulo de la onda de choque cónica. (b) Relación de presiones de estancamiento. (c) Presión sobre la superficie del cono adimensionalizada.

Las Figs. 8, 9 y 10 ilustran para los conos de 10° , 30° y 50° las variaciones del ángulo de la onda de choque cónica, de la relación de presiones de estancamiento y de la presión sobre la superficie del cono adimensionalizada como funciones del número de Mach inicial.

Las curvas denotadas como *analytical* se obtienen partiendo del proceso de integración de Taylor y Maccoll, determinando la ubicación de la onda de choque cónica, y calculando las relaciones de interés usando las ecuaciones para flujo isentrópico y para ondas de choque oblicuas. Es

posible usar las expresiones para flujo isentrópico ya que, al igual que en las simulaciones, se parte de las hipótesis de flujo adiabático y no viscoso.

La correspondencia entre las aproximaciones obtenidas con el *solver rhoCentralFoam* y las curvas teóricas es en general muy buena para todos los ángulos de apertura, para todo el intervalo de números de Mach considerado.

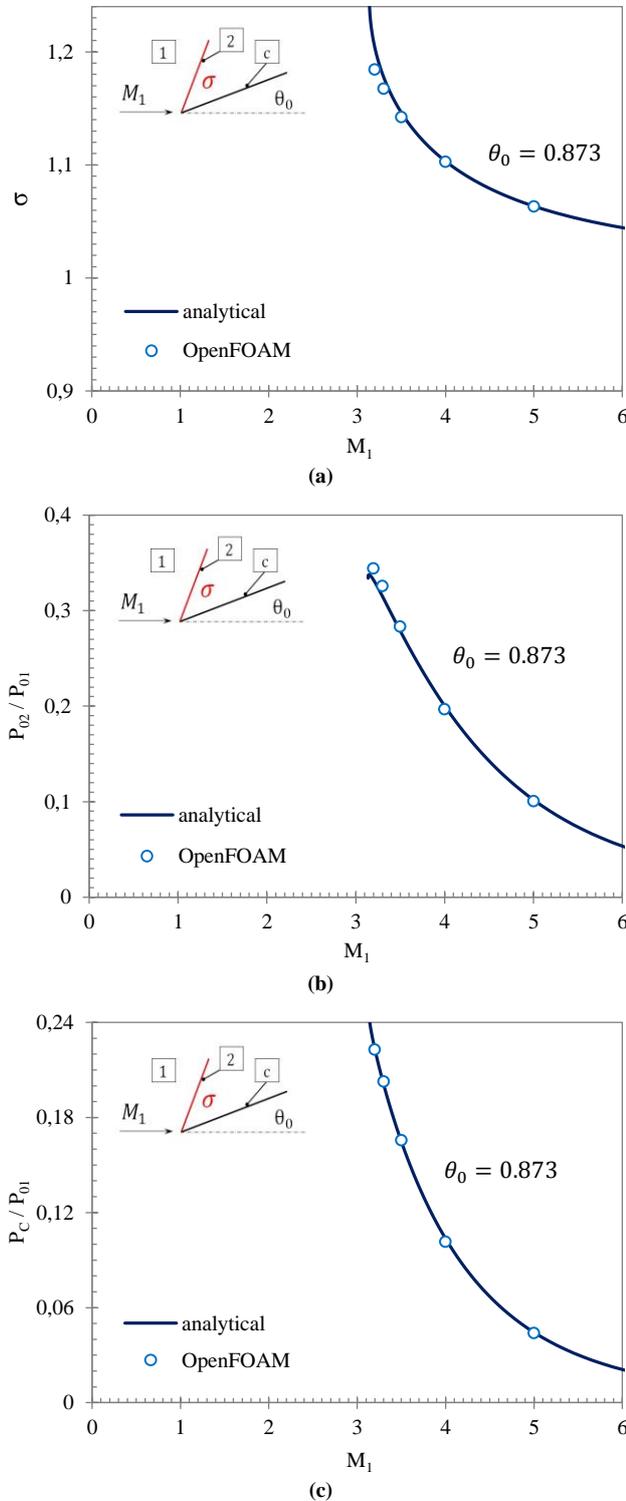


Fig. 10: Resultados para el cono de 50° en función del número de Mach. (a) Ángulo de la onda de choque cónica. (b) Relación de presiones de estancamiento. (c) Presión sobre la superficie del cono adimensionalizada.

Al disminuir M_1 , el ángulo de la onda de choque presenta un aumento no lineal el cual es predicho en forma adecuada

independientemente del ángulo del cono. Por otro lado, la variación del salto de presiones totales es muy sensible al ángulo del obstáculo, dado que mientras mayor es este último, más empinada es la disminución de la relación P_{02}/P_{01} con el número de Mach. Para ángulos de apertura pequeños, el salto de presiones de impacto es prácticamente despreciable en todo el rango de M_1 (véase Fig. 8-b). También se observa en la Fig. 8-b un punto a $M_1 = 4$ donde la relación graficada es apenas mayor que la unidad. Esto no tiene sentido físico y se debe a imprecisiones del esquema numérico.

En cuanto a la relación P_C/P_{01} , se observa para todos los casos que tiende asintóticamente a cero al aumentar el número de Mach de la corriente libre. Esto se debe a que, a igual presión estática inicial, la presión total depende del cuadrado de M_1 .

Comparación con datos experimentales

En 1936 el Ordnance Committee de Londres organizó una serie de fotografías de proyectiles a alta velocidad para ser llevadas a cabo en el Research Department of The Royal Arsenal, Woolwich (Maccoll, 1937). Las fotografías de los proyectiles con cabeza cónica con semi-ángulos de 10° , 20° y 30° tomadas a varios números de Mach sirvieron como evidencia adicional para respaldar el análisis del flujo cónico de Taylor y Maccoll, dado que para cada caso ensayado se midió el valor del ángulo de la onda de choque cónica formada.

La Figura 11 compara los datos experimentales de 1936 con la teoría del flujo cónico y con los resultados obtenidos de las simulaciones expuestas anteriormente. La razón de utilizar mencionadas experiencias como instrumentos de validación es que son las mismas que empleó Maccoll para ratificar sus resultados numéricos en su trabajo de 1937.

Desde 1933 hasta la fecha se han realizado numerosos ensayos relacionados con el flujo supersónico en torno a conos, los cuales han validado sucesivamente la teoría de Taylor y Maccoll. Por ello, se asume que las curvas analíticas son un punto de referencia sólido para la verificación de las capacidades de OpenFOAM®.

De la Fig. 11 se destaca que la correspondencia entre la teoría, las simulaciones y los datos experimentales es muy buena.

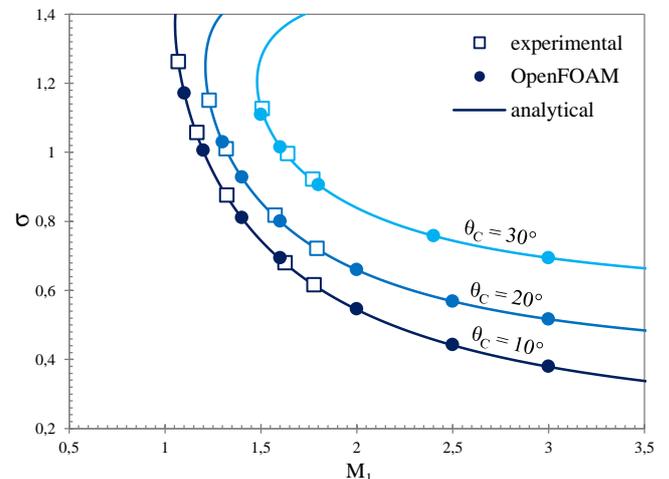


Fig. 11: Comparación con datos experimentales. Ángulo de la onda de choque cónica en función del número de Mach libre, con el ángulo de apertura del cono como parámetro.

PREDICCIONES SOBRE LA SEPARACIÓN DE LA ONDA DE CHOQUE

Al igual que en el caso de la cuña bidimensional, la teoría del flujo en torno a conos circulares predice para cada valor de M_1 y θ_C , dos valores posibles de σ correspondientes a las llamadas ondas de choque fuerte y débil, no obstante en la práctica sólo se observan choques débiles, para los cuales el valor de σ es el menor, a menos que se imponga externamente una presión elevada aguas abajo en cuyo caso podría darse un choque fuerte. Si bien el choque fuerte casi nunca es observado en la práctica, es interesante resaltar que la teoría predice que bajo cualquier conjunto dado de condiciones, se tienen o dos soluciones posibles o ninguna (Shapiro, 1954; Ferri, 1949).

Para cada valor de M_1 , existe un máximo θ_C para el cual existe una solución al flujo cónico. Por encima de ese ángulo, no se encuentra una solución analítica dentro del marco de la teoría y esto se corresponde físicamente con la separación de la onda de choque del vértice del cono. Visto de otro modo, puede decirse que para cada valor de θ_C , hay un M_1 mínimo por debajo del cual la onda no permanece adherida. Esto fue puntualizado por Maccoll al notar que en los casos donde no era posible encontrar solución matemática alguna a su procedimiento de integración, las fotografías experimentales mostraban que la onda de choque ya no era cónica y se encontraba distanciada del vértice del cono.

Se evalúa ahora la capacidad del solver *rhoCentralFoam* para predecir las condiciones bajo las cuales se produce la separación de la onda de choque cónica en el caso del cono tridimensional considerando simetría axial. El experimento numérico consiste en tomar un ángulo de cono fijo e ir variando ligeramente el número de Mach hasta captar la transición desde un choque cónico-recto ligado hasta uno curvo separado.

Notar que ya no puede emplearse la teoría como marco de verificación para estas simulaciones debido que ésta extiende su validez hasta que la onda deja de ser cónica-recta puesto que al curvarse se invalidan varias de las hipótesis que la sustentan, como por ejemplo que el campo detrás del choque es isentrópico.

La visualización de la estructura del flujo puede hacerse a través campo de velocidades, temperaturas, densidades o presiones. Para apreciar cualitativamente la forma y posición de la onda de choque es indiferente utilizar cualquiera de esos campos. Las Figs. 12-a, b y c dan una idea de cómo se transforma la geometría del choque al variar el número de Mach ligeramente por debajo del mínimo predicho por la teoría para los conos de 10, 30 y 50°, respectivamente. Las figuras correspondientes a los conos de 20 y 40° pueden encontrarse en (Lorenzon, 2014).

Puede observarse en la Fig. 12-a que para números de Mach iniciales por debajo de 1.05 la curvatura del choque ya es considerable. El despegue de la onda comienza a apreciarse en 1.04 siendo evidente en 1.03. La teoría de flujo cónico extiende su validez para un cono de 10° hasta un número de Mach mínimo de 1.053, pero de acuerdo con lo visto en las simulaciones, la onda no se separa inmediatamente por debajo del mínimo sino que se deforma dejando de ser cónica y posteriormente empieza a distanciarse del vértice del cono. Apreciaciones similares pueden extraerse a partir de los demás casos. Con el

objetivo de definir el Mach límite inferior basado en las simulaciones, se adopta como criterio que el flujo deja de ser cónico cuando la curvatura del choque se vuelve notoria a simple vista.

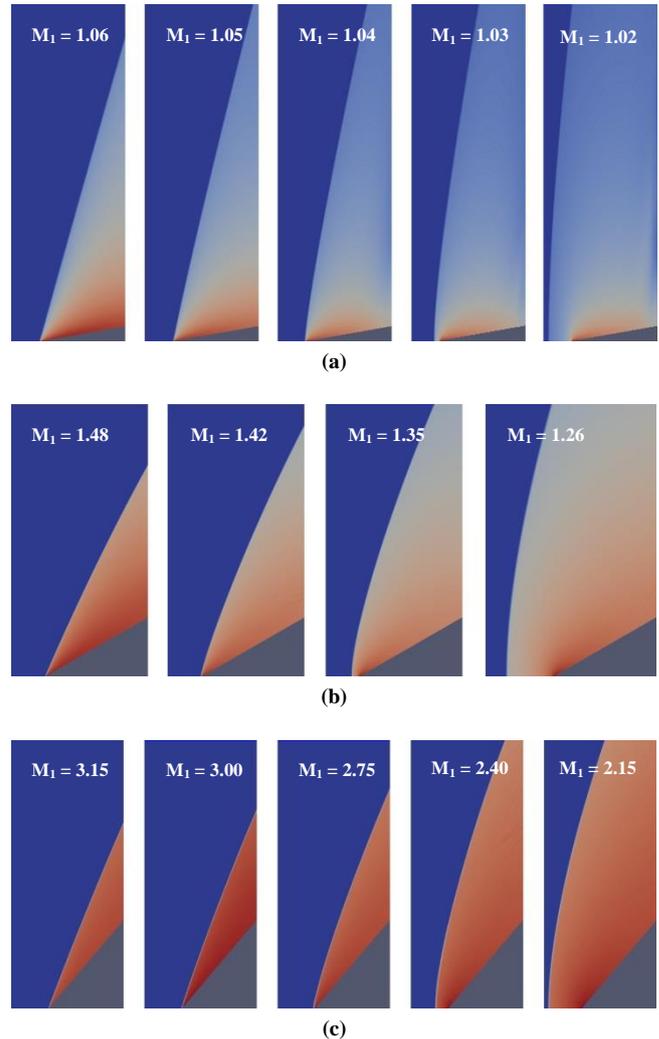


Fig. 12: Variación de la forma y posición de la onda de choque con el número de Mach libre. (a) $\theta_C = 10^\circ$. (b) $\theta_C = 30^\circ$. (c) $\theta_C = 50^\circ$.

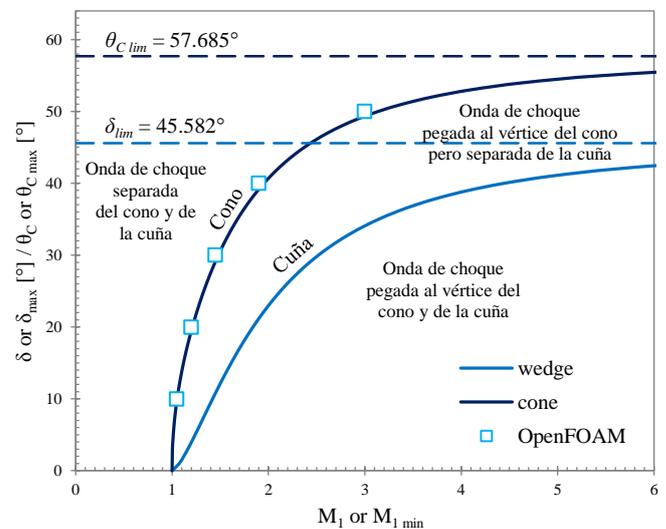


Fig. 13: Regiones de onda de choque adherida y separada.

En general, se aprecia la tendencia de que conforme aumenta el ángulo del cono, la estructura del flujo se vuelve menos sensible al número de Mach. Al simular el cono de 10° , cambios en el número de Mach del orden de un centésimo producen transformaciones en la onda de choque (véase Fig. 12-a), mientras que su posición y su forma resultan prácticamente inalteradas ante cambios en el Mach de tres décimos en el caso del cono de 50° (Fig. 12-c).

En la Fig. 13 se grafican los límites teóricos de validez tanto de la teoría de ondas de choque oblicuas (curva *wedge*) como de la de flujo cónico de Taylor y Maccoll (curva *cone*). Convenientemente, se añaden allí los puntos determinados con base en los campos proporcionados por OpenFOAM®, tales como los observados en las Figs. 12-a, b y c.

Puede notarse claramente que para un mismo ángulo del obstáculo, la separación ocurre a mayores velocidades en el caso de la cuña que en el caso del cono. De la misma manera podría decirse que a igualdad de número de Mach, se tienen estructuras de flujo con ondas de choque ligadas sobre ángulos de apertura notablemente mayores para conos que para cuñas bidimensionales. Esto se debe a que, por las características tridimensionales del flujo, las perturbaciones introducidas por la presencia del cono son menos severas. Podría interpretarse que el flujo se acomoda mejor al pasar a través del cono tridimensional que por la cuña bidimensional lo cual se conoce como *efecto de alivio tridimensional* (Anderson, 1990).

Tanto la teoría de ondas de choque oblicuas como la de flujo cónico, predicen que existe un ángulo de apertura del obstáculo límite por encima del cual no se encuentra solución teórica alguna para ningún número de Mach. Estos ángulos límite se denotan en la Fig. 13 como δ_{lim} y $\theta_{c lim}$ para los casos de la cuña bidimensional y del cono tridimensional, respectivamente.

Es muy buena la concordancia de la curva teórica con las estimaciones obtenidas por medio del *solver rhoCentralFoam* acerca de los números de Mach a los cuales ocurre la separación de la discontinuidad.

Comparación con datos experimentales

Aquí se comparan resultados numéricos obtenidos con datos experimentales de los ensayos llevados a cabo en Londres. La serie de fotografías de proyectiles de cabeza cónica con semi-ángulo de apertura de 20° a alta velocidad se contrasta con algunas de las simulaciones realizadas en las Figs. 14-a, b y c.

El parecido entre los campos de presiones proporcionados por OpenFOAM® y las fotografías (*shadowgraphs*) experimentales es muy bueno.

Si bien no se cuenta con un marco teórico adecuado para validar las simulaciones a números de Mach por debajo de los mínimos, las fotografías permiten intuir que las virtudes atribuidas a OpenFOAM® en los casos analizados con estructuras de ondas de choque adheridas se mantienen posteriormente a la separación.

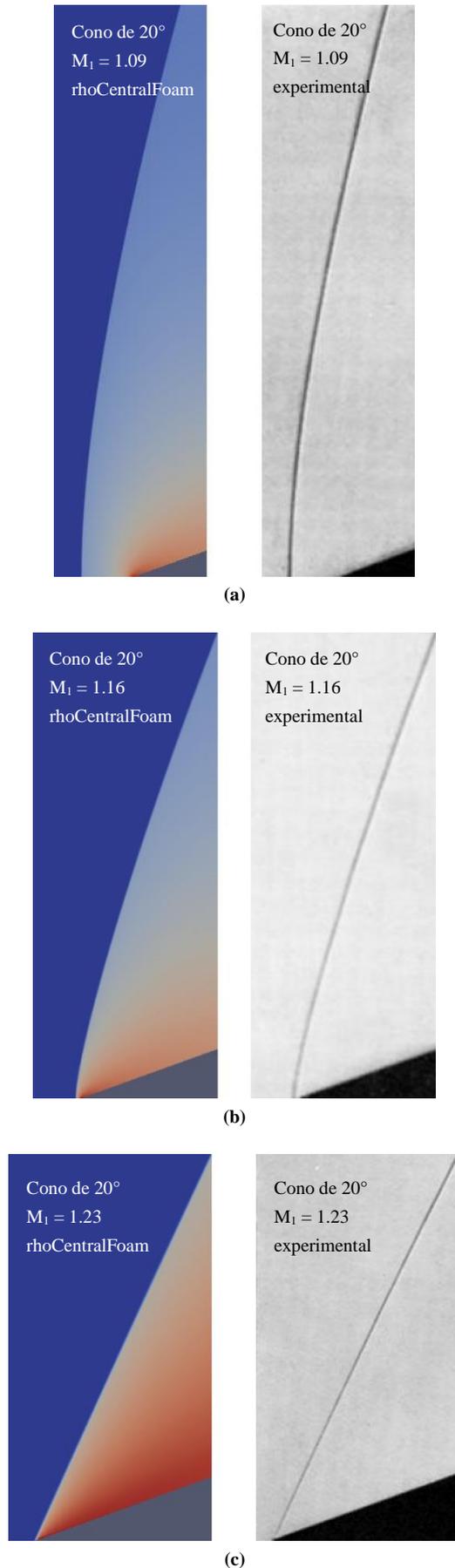


Fig. 14: Separación del choque. Comparación del campo de presiones con fotografías para el cono de 20° .
(a) $M_1 = 1.09$. (b) $M_1 = 1.16$. (c) $M_1 = 1.23$.

CONCLUSIONES

El objetivo más general de evaluar las capacidades y limitaciones de OpenFOAM® para estudiar la estructura de flujos transónicos y supersónicos en torno a geometrías elementales bidimensionales y tridimensionales fue alcanzado satisfactoriamente, quedando registradas en los resultados la eficacia y flexibilidad de las herramientas seleccionadas. Se refiere con eficacia a que los resultados presentan bajo error de aproximación.

Casos de prueba

Considerando la simplicidad geométrica de los casos estudiados, las mallas estructuradas generadas mediante la herramienta *blockMesh* no presentan inconveniente alguno y tienen la característica de poder ser modificadas en forma y resolución rápidamente.

Aun utilizando mallas relativamente gruesas, las aproximaciones que brinda OpenFOAM® acerca de la posición e intensidad de las ondas de choque son muy buenas, sin embargo, el espesor observado de la discontinuidad es proporcional al tamaño de las celdas. Al refinar sucesivamente las mallas, se verifica una propiedad conocida como convergencia de malla, es decir que las soluciones obtenidas tienden a acercarse a las soluciones analíticas.

Se compara el desempeño de dos solvers disponibles en OpenFOAM® para la simulación de flujos a alta velocidad en torno a una cuña bidimensional y a un cono aplicando simetría axial. A partir del pos-procesamiento de los resultados se deduce que *rhoCentralFoam* tiene las mejores prestaciones para simular flujos compresibles y pueden extraerse las siguientes apreciaciones:

- En el caso de la cuña bidimensional, ambos solvers reproducen la teoría de ondas de choque oblicuas con gran precisión.
- En el caso del cono con simetría axial, las predicciones de ambos solvers son correctas aunque *rhoCentralFoam* exhibe, en general, mejores aproximaciones numéricas.
- Los resultados provistos por ambos solvers presentan oscilaciones en los campos de movimiento detrás de la discontinuidad las cuales tienden a intensificarse sustancialmente al aumentar el número de Mach inicial. Estas inestabilidades son notablemente mayores en el caso de *sonicFoam*.
- Todos los campos de movimiento resultantes muestran disipación en las zonas de grandes gradientes, lo que empeora la definición del choque. Dicho efecto disminuye al aumentar el Mach y es un poco mayor en el caso de *sonicFoam*, especialmente a bajas velocidades.
- En algunos casos, aún si se verifica la restricción que impone el número CFL, con *rhoCentralFoam* aparecen inestabilidades en la solución cuando se usan pasos de tiempo relativamente grandes (Co próximo a la unidad). Por su parte, *sonicFoam* se muestra poca sensibilidad al número de Courant (Co) siempre que no surjan errores en el proceso iterativo.

Simulación de flujos en torno a conos sin ángulo de ataque

Empleando el solver *rhoCentralFoam*, se simulan conos con semi-ángulos de apertura de 10, 20, 30, 40 y 50°, todos a números de Mach que van desde las proximidades de la separación del choque hasta $M_1 = 5$. Los resultados de las simulaciones se confrontan con la teoría de flujo cónico de Taylor y Maccoll, la cual ha sido sucesivamente validada empíricamente desde su publicación. Como variables de comparación se utilizan el ángulo de la onda de choque cónica, el número de Mach inmediatamente detrás del choque, la relación de presiones y presiones de estancamiento a través de la onda, el número de Mach sobre la superficie del cono, la relación de compresión entre la discontinuidad y el obstáculo, la relación entre la presión sobre la superficie y la presión de estancamiento de la corriente libre, y el coeficiente de resistencia por presión basado en el área proyectada frontal del cono. Estas variables no son elegidas al azar sino que sus variaciones en función del número de Mach representan curvas típicas del flujo en torno a conos.

Algunas de las observaciones que pueden hacerse con base en los resultados alcanzados son las siguientes:

- En general, la correspondencia entre los resultados obtenidos mediante OpenFOAM® y las curvas teóricas es muy buena. La posición del choque, la relación de presiones de estancamiento a través de la discontinuidad y la relación entre la presión sobre el cono y la de estancamiento del flujo sin perturbar, son correctamente estimadas para todos los conos.
- Se aprecia la tendencia general de que los errores relativos que presentan las aproximaciones de OpenFOAM® aumentan conforme aumenta el ángulo de apertura del cono. Esto es evidente en el cono de 50°.

Predicciones sobre la separación del choque

Se examina la capacidad de OpenFOAM® para predecir el número de Mach mínimo para el cual se tiene una estructura de flujo con onda de choque cónica adherida al vértice. El experimento se realiza con el solver *rhoCentralFoam* y los resultados se comparan con fotografías experimentales.

En conformidad con los datos experimentales, se obtiene que por debajo de cierto número de Mach la onda deja de ser cónica-recta y comienza a curvarse para luego separarse visiblemente del obstáculo. El rango de números de Mach para el cual ocurre dicha transición es predicho por OpenFOAM® con precisión, además, la estructura del flujo durante este proceso es aproximada correctamente.

Se aprecia también, que mientras mayor es el ángulo de apertura del cono, mayor es el rango de velocidades sobre el cual ocurre la transformación desde una onda cónica pegada hasta un choque curvo separado.

Estos resultados apuntan a que el desempeño observado del solver *rhoCentralFoam* para estimar las variables del flujo con una estructura de onda de choque adherida se mantiene luego de la separación.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por Proyectos de CONICET, SECyT de la Universidad Nacional de Córdoba y SECyT de la Provincia de Córdoba. El primer autor ha sido beneficiario de la Beca Estímulo a las Vocaciones Científicas (EVC-CIN 2014) del Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) a partir de Septiembre de 2014.

REFERENCIAS

- [1] Anderson, John D. (1990), *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective* (Second Edition), McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- [2] Anderson, John D. (2001), *Fundamentals of Aerodynamics* (Third Edition), McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- [3] Courant, R.; Friedrichs, K. O.; Lewy, H. (1928), "Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik", *Mathematische Annalen*, vol. 100 (no. 1), pp. 32-74.
- [4] Dailey, Charles L.; Wood, Francis C. (1949), *Computation Curves for Compressible Fluid Problems*, John Wiley & Sons, Inc.
- [5] Falcinelli, O.; Elaskar, S.; Tamagno, J. (2008), "Reducing the Numerical Viscosity in Non-Structured Three-Dimensional Finite Volumes Computations", *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 45 (no. 2), pp. 406-408.
- [6] Feldhuhn, R. H.; Winkelmann, A. E.; Pasiuk, L. (1971), "An Experimental Investigation of the Flowfield around a Yawed Cone", *AIAA Journal*, vol. 9 (no. 6), pp. 1074-1081.
- [7] Ferri, Antonio (1950), *Supersonic Flow around Circular Cones at Angles of Attack*, NACA Report 1045.
- [8] Ferri, Antonio (1949), *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows*, the Macmillan Co.
- [9] Ferziger, Joel H.; Milovan, Perić (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics* (Third Edition), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] Gutierrez Marcantoni, L.; Tamagno, J.; Elaskar, S. (2015), "RANS Simulation of Turbulent Diffusive Combustion Using OpenFOAM", *Journal of Applied Fluid Mechanics*. Aceptado para publicación.
- [11] Holt, Maurice (1977), *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Berlin Heidelberg.
- [12] Issa, Raad I. (1986), "Solution of the Implicitly Discretized Fluid Flow Equation by Operator Splitting", *Journal of Computational Physics*, vol. 62, pp. 40-65.
- [13] Jasak, Hrvoje (1996), *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*, Department of Mechanical Engineering, University of London.
- [14] Kurganov, Alexander; Tadmor, Eitan (2000), "New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations", *Journal of Computational Physics*, vol. 160, pp. 241-282.
- [15] Kutler, Paul; Lomax, Harvard (1971), "Shock-Capturing, Finite-Difference Approach to Supersonic Flows", *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 8 (no. 12), pp. 1175-1182.
- [16] Lorenzon, Denis (2014), *Simulación de Flujos Cónicos con OpenFOAM*, Departamento de Aeronáutica, Universidad Nacional de Córdoba.
- [17] Maccoll J. W. (1937), "The Conical Shock Wave Formed by a Cone Moving at a High Speed", *Proceedings of the Royal Society London*, series A, vol. 159 (no. 898), pp. 459-472.
- [18] OpenCFD (2013), *OpenFOAM® Programmer's Guide* (version 2.2.1, 2013), OpenFOAM Foundation.
- [19] OpenCFD (2014a), *OpenFOAM® User Guide* (version 2.3.0, 2014), OpenFOAM Foundation.
- [20] OpenCFD (2014b), "OpenFOAM® C++ Documentation", tomado de: <http://foam.sourceforge.net/docs/cpp/>.
- [21] Poinsot, T. J.; Lele, S. K. (1992), "Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows", *Journal of Computational Physics*, vol. 101 (no. 1), pp. 104-129.
- [22] Rainbird, W. J. (1968), "The External Flow Field about Yawed Circular Cones", *AGARD Conference Proceedings*, no. 30.
- [23] Saldía, J.; Elaskar, S.; Tamagno, J. (2015), "A Scheme for Inviscid Compressible Flow, Considering a Gas in Thermo-Chemical Equilibrium", *International Journal of Computational Methods*. Aceptado para publicación.
- [24] Shapiro, Ascher H. (1953), *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow* (vol. 1), the Ronald Press Co.
- [25] Shapiro, Ascher H. (1954), *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow* (vol. 2), the Ronald Press Co.
- [26] Sims, Joseph L. (1964), *Tables for Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack*, NASA SP-3004.
- [27] Tannehill, John C.; Anderson, Dale A.; Pletcher, Richard H. (1997), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (Second Edition), CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [28] Taylor G. I.; Maccoll J. W. (1933a), "The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds. I", *Proceedings of the Royal Society London*, series A, vol. 139 (no. 838), pp. 278-297.
- [29] Taylor G. I.; Maccoll J. W. (1933b), "The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds. II", *Proceedings of the Royal Society London*, series A, vol. 139 (no. 838), pp. 298-311.
- [30] Tracy, Richard R. (1964), "Hypersonic Flow over a Yawed Circular Cone", *Graduate Aeronautical Laboratories Memorandum*, vol. 69, California Institute of Technology.
- [31] Yahalom, Rafael (1971), *An Experimental Investigation of Supersonic Flow Past Yawed Cones*, Aeronautical Sciences Division, University of California.