CUADERNOS DE EDUCACIÓN
año VII - número 7 - Córdoba, mayo de 2009

¿CÓMO FUNCIONA EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS DOCENTES DEL BACHILLERATO? ALCANCES Y LIMITACIONES

HOW DOES MATHEMATICAL KNOWLEDGE WORK IN HIGH-SCHOOL TEACHERS? SCOPE AND LIMITATIONS

Irma Fuenlabrada*

Se plantea el desarrollo de una investigación cualitativa con los recursos metodológicos de una Ingeniería Didáctica para estudiar el caso de dos grupos de docentes de matemáticas del nivel preuniversitario mexicano que atienden a jóvenes en desventaja (indígenas o de la zona conurbana de la Ciudad de México). La asunción de la investigación es establecer condicionantes didácticas para sustentar procesos de actualización para profesores, que procuren en ellos en primera instancia, la reflexión de los *usos y funciones* del conocimiento matemático. Y en segundo lugar, se aspira a que el tránsito de los maestros por los espacios de aprendizaje les provea de insumos para modificar su práctica docente; misma que reconocen deficitaria. En esta presentación, se ilustra a través de un ejemplo, los avances analíticos en la indagatoria referida a la planta docente que atiende a poblaciones urbana marginales. Con ello se persigue abrir espacios de discusión y reflexión acerca de los alcances y limitaciones del conocimiento matemático cuando éste es enseñado desde la formalidad y el rigor propio de la disciplina.

Enseñanza matemática - Ingeniería Didáctica -
Recursos metodológicos - Práctica docente - estudio de caso

---

* Departamento de Investigaciones Educativas-Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados, México.
Correo electrónico: irfuen@cinvestav.mx. Bertha Vivanco ha colaborado para la elaboración de este artículo.

This paper releases the development of a qualitative research with the methodological resources of a Didactical Engineering to study the case of two groups of math teachers of the Mexican pre-University level that work with disadvantaged youth (indigenous or from the Mexico City impoverished neighbourhoods). The assumption of the research is establishing didactic conditionings to support actualization processes for teachers, which first of all look for reflections on the *uses and functions* of mathematical knowledge. Secondly, this paper intends that the teachers' transit through the learning spaces provides them with tools to modify their teaching practice, which they acknowledge as underachieving. This paper, through an illustrative example, releases the analytical advances on the research on the teaching staff that works with urban marginal populations. With this we strive to open discussion and reflection spaces about the scope and limitations of the mathematical knowledge when this is taught with the formality and rigor that characterize the discipline.

Mathematical teaching - Didactic Engineering -
Methodological resources - Teaching practices - Case study

1. Antecedentes

Este trabajo se inscribe en las investigaciones que indagan los procesos de reconceptualización disciplinar y de enseñanza de la matemática en docentes desde una perspectiva constructivista del aprendizaje (Fuenlabrada, 1988). Los profesores del estudio trabajan en México en el nivel del bachillerato[1] y atienden poblaciones de alumnos en desventaja (indígenas

[1] En México el nivel de Bachillerato se corresponde al nivel preuniversitario, consta de tres años. En el periodo 2000-2006 se abren dos nuevas modalidades: El bachillerato Intercultural Bilingüe para atender poblaciones indígenas, gestionado por la Dirección General de Educación Intercultural Bilingüe, adscrita directamente a la Presidencia de la República. Por otro en la zona conurbana de la Ciudad de México el Gobierno del Distrito Federal abre otra modalidad para atender a jóvenes con una historia escolar accidentada, por lo que necesitan de un mayor acompañamiento de sus profesores (esto está previsto a través de un sistema de tutorías). En principio, son de bajos recursos (muchos de ellos están casados o viven con una pareja, tienen hijos, etc.) y tienen deseos de retomar sus estudios. Entre otras cosas requie-

y urbano-marginales) en relación a otras comunidades estudiantiles en cuanto a su desempeño en el sistema educativo formal. Particularmente las autoridades institucionales que atienden a esos alumnos, están interesadas en que se instale en el aula una alternativa de enseñanza concebida desde una perspectiva constructivista del aprendizaje. A lo que se adiciona el interés de los maestros por subsanar el conocimiento matemático deficitario que sus alumnos poseen al ingresar al bachillerato. Los docentes del estudio asumen que dichas deficiencias obstaculizan la posibilidad de los alumnos para acceder a los contenidos matemáticos específicos del bachillerato; a la vez que reconocen que no han podido rectificar, al menos en la medida de sus propias expectativas, el conocimiento que sus alumnos debieron haber adquirido en su tránsito por la educación básica[2].

En realidad se trata del mismo problema visto desde dos lugares: la institución cuestiona, con base en la información de los resultados de aprendizaje de los alumnos, las clases "magistrales" a las que tienden la mayoría de los profesores; y así, considera reconocer en el "constructivismo" una alternativa metodológica para la enseñanza que quisiera que sus profesores funcionarizaran en sus clases. Por otro lado, si bien los docentes se adhieren al "constructivismo", se posicionan en éste desde ideas muy generales, por lo que no cuentan con recursos didácticos para la realización en el aula de estas aspiraciones. Es así como: (les parece importante) *que los alumnos construyan su aprendizaje,* (les parece que) *la memorización no les sirve* (a los estudiantes) *de nada,...,* (desearían) *que* (el conocimiento) *sea significativo,...,* (reconocen que) *el constructivismo tiene que ver con resolución de problemas,...,* (saben además que) *debe procurarse el trabajo colectivo y no sólo el individual.*

De las diversas formas que pudiera uno imaginarse para proveer a los profesores de algunos recursos metodológicos para la enseñanza desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, se encuentran los seminarios de discusión de artículos teóricos sobre el tema -en los que han participado, sin encontrar repuestas claras para orientar su enseñanza. En su lugar nos pareció más pertinente poner a los docentes en situaciones de

---

ren de un modelo "flexible" que les permita no sólo estudiar sino atender a su familia y trabajar.

[2] La educación básica en México se define (desde 1993) como un proceso educativo de doce años que inicia a los 3 años de edad de los niños, está organizado en tres niveles: Preescolar (tres grados), Primaria (seis grados) y Secundaria (tres grados).

aprendizaje recurriendo a situaciones de enseñanza diseñadas desde los lineamientos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1986), a través del diseño e implementación de una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995).

La razón de ello radica en que la opción de este recurso metodológico permite develar, para propios y ajenos, el funcionamiento de los saberes matemáticos de los profesores en la resolución de problemas; así como, sus creencias acerca de lo que significa "hacer matemáticas"; de los beneficios al aprendizaje que significa que el sujeto cognoscente asuma la responsabilidad de buscar por sí mismo la resolución de los problemas en lugar de mostrar su capacidad de réplica de las explicaciones externadas por su profesor en la clase. Particularmente, era necesario que los maestros a través de su propio proceder en la resolución de problemas, estuvieran en la posibilidad de cuestionarse si basta con tener el conocimiento formal de la matemática (mismo que regula las explicaciones de las clases magistrales del bachillerato, con demostraciones matemáticas incluidas) para aplicarlo de manera directa en la resolución de problemas (esto es lo que los docentes esperan que hagan sus alumnos).

El análisis *a priori* de la ingeriría anticipó, entre otras cosas, que las estrategias de solución y las maneras de actuar de los maestros frente a los problemas iban a distar de la "aplicación directa de conocimiento formal" que se sabe ostentan los maestros. A fin de garantizar que los conceptos matemáticos sobre los que se diseña la ingeniería fueran formalmente conocidos por los docentes, éstos se tomaron del curso Matemáticas I[3] (Fuenlabrada, et. al., 2006) que refiere a los conocimientos de la aritmética, la geometría elemental y el álgebra propuestos en el Plan y programas de estudio para la educación básica que se realiza en México. A esta consideración se adiciona, que los docentes participantes exhiben formación de matemáticos, físicos, actuarios e ingenieros.

[3] Este curso fue diseñado por solicitud inicial del Bachillerato Intercultural Bilingüe; posteriormente resultó de interés para la planta docente del Bachillerato que atiende población urbana marginal de la Ciudad de México, al reconocer que comparten con los primeros la atención a jóvenes que ingresan al nivel medio superior con conocimientos matemáticos deficitarios de la educación básica. El Programa del curso se acompaña de una propuesta metodológica para su implementación en aula expresada en dos manuales para el maestro y para el estudiante, con 30 fichas cada uno.

"Aplicación directa de conocimiento formal" es una manera de denominar, en este estudio, la creencia que los docentes tienen cuando una vez dadas las explicaciones de un concepto, que en el bachillerato apelan a la demostración matemática; proponen a sus alumnos problemas de aplicación del mismo. Si los maestros, por ejemplo, han demostrado *que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°*, los problemas que los alumnos resuelven refieren a encontrar cuánto mide uno de los ángulos de un triángulo si se conoce la medida de los otros dos. O bien, también sucede que cuando los maestros no encuentran "problemas de aplicación", su recurso para averiguar si los estudiantes han aprendido es pedirles en el examen, que demuestren la validez de una afirmación reproduciendo la demostración enseñada en clase.

De suceder lo previsto en el análisis a priori de la ingeniería, y a reserva de regresar sobre el particular, se contaría con insumos para llevar a cabo una reflexión y discusión con los maestros acerca de las componentes y variables didácticas de las situaciones de enseñanza que propician que los alumnos (en este caso ellos mismos) muestren lo que realmente saben sobre el conocimiento matemático en juego y cómo lo utilizan para resolver, cuando éste no está mediado por una explicación magistral que oriente y encajone a sus estrategias de solución.

2. La propuesta Matemáticas I

La propuesta de curso Matemáticas I es el referente desde el que se diseña la ingeniería didáctica; además, es este curso el que los docentes tomarían como base para subsanar los conocimientos aritméticos, geométricos y algebraicos con los que sus alumnos ingresan al nivel preuniversitario. Por estas razones se hace necesario caracterizar brevemente dicho curso.

Matemáticas I, considera desde una perspectiva de equidad[4], ofrecer a los estudiantes del primer semestre del bachillerato, un curso concebido para revisar, reforzar y proporcionar conocimientos matemáticos que debieron haber aprendido en su tránsito por la educación básica.

El diseño del curso implicó hacer una selección y reorganización de temáticas de la currícula de las escuelas primaria y secundaria articuladas

---

[4] Recordemos que los alumnos de los bachilleratos a los que refiere esta investigación, son alumnos de poblaciones indígenas o urbana marginales.

desde la lógica de revisarlas desde sus expresiones simples hasta aquellas que implican el uso de instrumental matemático simbólico más general, bajo la idea de que éstos son necesarios tanto para construir conocimientos más complejos como para apoyar el aprendizaje en otras asignaturas (física y química) del bachillerato.

Con todo, de mayor importancia es el enfoque metodológico para la enseñanza y el aprendizaje que sustenta al Programa del Curso expresado en los materiales para los docentes y los alumnos. Para el desarrollo de la propuesta fue necesario imaginar un andamiaje didáctico de las temáticas seleccionadas que posibilitara en los estudiantes acceder con sentido a la simbolización matemática y priorizara la simultánea recuperación y problematización-extensión de los saberes previos (noción y usos) de los sujetos de aprendizaje. Es decir, se procura que los recursos didácticos sugeridos respondan de manera coherente a lo que se anticipa sobre los particulares posicionamientos de los alumnos acerca de lo simbólico, y sus maneras de utilizar lo que saben; en ello se conjetura lo que les falta por aprender sobre las temáticas propuestas.

La propuesta metodológica incorpora también sugerencias didácticas para que las clases sean espacios de reflexión de los alumnos sobre el conocimiento disciplinario de la educación básica. Si bien se considera, que éste puede ser conocido por algunos estudiantes, al menos en su aspecto instrumental; también se postula que los saberes matemáticos que poseen no necesariamente se sustentan en conocimientos conceptuales[5].

Los recursos para la enseñanza que se proponen devienen de la concepción constructivista del aprendizaje. Es decir, se propone que los alumnos resuelvan diversas situaciones problemáticas, diseñadas desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986).

3. Los problemas de enseñanza de los maestros y sus posibles soluciones

La asunción de la TSD se sostiene en este estudio, no sólo para atender la solicitud de las autoridades institucionales ('enseñanza constructivista') sino fundamentalmente, como se anticipara, porque posibilita dar

[5] De todas formas, dado el caso, no es desdeñable ofrecerles la posibilidad de profundizar sobre las nociones matemáticas que pudieran haber aprendido en su paso por la educación básica.

respuesta a diversos problemas relacionados con la práctica docente que los profesores realizan.

3.1. Los problemas

Las preocupaciones sobre la práctica docente fueron externadas por los profesores en las primeras pláticas, entre las más importantes está que no comprenden la falta de correspondencia entre *lo que enseñan* y lo que sus alumnos dan muestra de haber *aprendido*. Les parece que no registran que los procesos de enseñanza que realizan en sus clases se correlacionan con la forma como conciben al aprendizaje. Es decir, la manera como suponen "que los alumnos aprenden" implica explicita o implícitamente a las acciones de enseñanza que implementan en el aula y en general, los maestros del estudio no han tomado suficiente conciencia de ello.

Otra dificultad reside en el poco sentido que le encuentran al diagnóstico inicial (sugerido y requerido por la institución). Primeramente porque les resulta abrumador, pero sobretodo porque no saben qué hacer con los resultados, más allá de retomar los conocimientos deficitarios, atendiendo al repaso de los aspectos instrumentales de éstos (operatoria, resolución de ecuaciones, fórmulas para calcular áreas y volúmenes, por mencionar algunos); para darse cuenta después que los alumnos no saben cómo usarlos en la resolución de problemas.

Paradójicamente, el sentir de los maestros se tensa entre atender a una práctica pedagógica 'normativa´ (el diagnóstico) que reconocen *a priori* de utilidad y, realizarla sólo para constatar lo poco que les sirve para orientar su enseñanza: *el diagnóstico no sirve para nada, repasamos lo que (los estudiantes) no saben y de todas formas no pueden resolver problemas.*

Los profesores suponen que la dificultad –en la resolución de problemas, radica en las limitaciones lectoras de los estudiantes, dicen: *es que no comprenden 'textos matemáticos'.* Cabe aclarar que utilizan este término como si fuese sinónimo de 'lectura de problemas': (los alumnos) *leen párrafo por párrafo sin tomar en cuenta todos los datos del problema.*

De hecho los docentes, en un intento por remediar la falta de *comprensión lectora* de los alumnos, solicitan en las jornadas interdisciplinarias de los planteles la lectura de textos científicos a los maestros de las asignaturas de lengua o filosofía. Les desconcierta que no obstante ello, esto no repercuta en la comprensión de problemas y consignas escritas en la clase de matemáticas. Parece que no advierten los diferentes insumos necesarios para comprender un artículo matemático y los requeridos en los problemas. A los profesores les preocupa también la poca *capacidad de razonamiento* de sus alumnos.

3.2. En busca de alternativas de solución

Desde la Teoría Didáctica asumida en la investigación, plantear una situación de enseñanza significa retar (sistemáticamente) los conocimientos y experiencias de los sujetos cognoscentes; y, en la observancia de lo que ponen en juego para responder (al reto) su maestro cuenta con seguridades de lo que saben y cómo lo utilizan. Este proceso (reto-respuesta) se ofrece a los docentes, en primera instancia, como un recurso alternativo a sus preocupaciones sobre las evaluaciones de diagnóstico que sólo realizan al inicio del curso y no en el transcurso del proceso de aprendizaje, para que continuamente estén informados acerca de los conocimientos que poseen sus alumnos. Más adelante se explica la forma en que esta alternativa fue objeto de reflexión en los maestros.

En segunda instancia, el recurso a la TSD, potencia la posibilidad para los docentes de transformar con base en el hacer de sus alumnos (respuesta al reto) las estrategias iniciales de solución evidenciadas hacia los recursos nocionales e instrumentales que ofrece la matemática. Así, las situaciones de enseñanza y de aprendizaje concebidas, procuran orientar el proceso para que los alumnos puedan reconocer sus propias estrategias de solución y la correlación de éstas con los recursos constituidos: aritméticos, algebraicos y/o geométricos. Y con ello, favorecer que profundicen o reorienten sus saberes cuando esto sea necesario.

Desde luego, este proceso implica una participación activa de los alumnos desde la situación inicial, durante las puestas en común entre iguales (organizados en parejas o equipos) y las discusiones plenarias (todo el grupo) con lo que se promueve la construcción de conocimientos en colectivo, capitalizando las reflexiones y conocimientos individuales.

Desde las consideraciones señaladas emerge una alternativa de enseñanza diferente a la propiciada por las clases magistrales que se quieren abatir. Sin embargo, experiencias previas señalan que los maestros al estar inmersos en las situaciones de aprendizaje de la ingeniería se asumen 'como alumnos' y por tanto se ocupan y preocupan por solucionar los problemas y actividades que se les plantean; por lo que difícilmente toman nota de las cuestiones didácticas en juego. Es así que en los espacios de reflexión para analizar las resoluciones encontradas por los profesores, sea necesario entretejer las actitudes que mostraron frente a las situaciones propuestas; así como los recursos y la conducción llevados a cabo por la coordinadora del taller durante la experiencia. Desde esta mirada, las reflexiones estuvieron circunscritas a la revisión continua de tres aspectos, a saber: ¿cómo se realiza el reto de conocimientos y experiencias (en esta actividad)?; los recursos nocionales e instrumentales que ofrece la matemática ¿son punto de llegada o de partida en el proceso de aprendizaje?; ¿en qué resultó benéfico al aprendizaje los espacios de socialización del conocimiento (parejas, equipo y trabajo en grupo)?

4. El proceso de experimentación de la ingeniería

Para atender las cuestiones de orden didáctico que subyacen a la propuesta referente (Matemáticas I); sobrevino el interrogante de si los maestros contaban con los recursos didácticos necesarios para propiciar diálogos reflexivos con sus alumnos una vez que aparecieran las resoluciones que éstos pudieran generar a los planteamientos sugeridos. Es decir, desde la perspectiva de la TSD, es necesario concebir al conocimiento matemático no como un objeto incuestionable, rígido, que encuentra su sentido en sí mismo, sino como un conocimiento sujeto a experimentación, discusión y análisis; en el que, además las estrategias de solución que aparecen en el proceso de aprendizaje son diversas aproximaciones al conocimiento convencional de resolución propuesto por la matemática.

Para dar cauce a este interrogante la investigación se realiza, como se ha dicho, en apego a los recursos metodológicos de una Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) que procura poner a los sujetos en un escenario que evidencie, a través de sus acciones, sus saberes frente a situaciones problemáticas. La salvedad en el caso que nos ocupa, es que los conocimientos matemáticos considerados en las situaciones corresponden a la educación básica (de México), tales como: las leyes de los sistemas de numeración de base y posición, la desigualdad del triángulo, fórmulas para el cálculo de área, ecuaciones lineales o cuadráticas, por mencionar algunos; y éstos, se presume son del dominio de los profesores participantes quienes ostentan títulos profesionales de ingenieros, actuarios, físico y matemáticos. Se anticipó -no sin reservas-, la pertinencia de que los docentes participantes -análogamente a lo reportado en procesos de actualización de profesores de la primaria: Ávalos (1997); Moreno (1998)- necesitaran "echar una mirada" al conocimiento matemático que profesan. La reserva de esta anticipación se ampara en que el conocimiento matemático de los profesores de la experiencia es claramente diferente a los que tienen los maestros de la primaria, reportados en las investigaciones citadas.

Se llevaron a cabo dos jornadas de 30 horas con los profesores del bachillerato bilingüe intercultural y una de 15 horas con los del bachillerato urbano-marginal. El referente empírico de la investigación se toma de los registros de la experimentación de la ingeniería, a los que se adicionan las producciones de los docentes (en la resolución de problemas) y los comentarios que hicieran al curso Matemáticas I.

A los maestros, antes de implementar la ingeniería, se les entregó la propuesta del Curso Matemáticas I, para que desde su lectura emitieran su opinión por escrito. Se les sugirió la posibilidad, si lo consideraban conveniente, de que realizaran con sus alumnos algunas fichas para respaldar sus apreciaciones iniciales; pero no lo hicieron.

Los maestros que atienden a la población indígena se mostraron más cautos que el otro grupo, respecto a considerar que la selección de contenidos a tratarse en el curso Matemáticas I, era *trivial* (entendida en su connotación: 'fácil'); desde esta apreciación, algunos (no pocos) docentes del bachillerato que atiende a la población urbana marginal, se aventuraron a señalar la *eliminación* de algunos problemas o bien *integrar varias fichas en una.* Ambos grupos mostraron su escepticismo (matizado en cada uno) respecto a que las situaciones problemáticas propuestas pudieran funcionar para desocultar conocimientos aprendidos "sin sentido" o bien, evidenciar malformaciones conceptuales o carencias en los conocimientos de sus alumnos.

No interesa dar cuenta del análisis pormenorizado del impacto que la propuesta (desde su lectura) suscitara en los maestros, se menciona sólo para contextualizar su sentir antes de la experimentación de la ingeniería.

5. Alcances y limitaciones del conocimiento de los maestros

5.1 La consigna. Actitudes iniciales frente a la situación

Para ilustrar en esta presentación, el uso que los profesores del estudio hacen del conocimiento formal de la matemática y evidenciar cómo en su actuación como "alumnos" subyacen actitudes que desde su posición de maestros cuestionan a sus propios estudiantes, se analiza la reacción de uno de los dos grupos[6], frente a problemas elementales de la geometría euclidiana. Éstos aparecen en una ficha de trabajo[7] en la que la primera consigna es:

Traza en hojas blancas, los triángulos determinados por los segmentos que aparecen en la tabla, compara tus trazos con los de tus compañeros de equipo:

Triángulo	Lado a	Lado b	Lado c
Δ uno	5 cm	8 cm	8 cm
Δ dos	6 cm	8 cm	10 cm
Δ tres	10 cm	4 cm	6 cm
Δ cuatro	6 cm	15 cm	11 cm
Δ cinco	5 cm	14 cm	7 cm

Al centro de la mesa alrededor de la cual estaban sentados los maestros, se colocaron hojas blancas, cuadriculadas, reglas graduadas y compases. Se estableció además, y de hecho se les animó a que compartieran su trabajo con uno o más compañeros. Sin embargo, al inicio se hicieron cargo individualmente de la tarea.

Preguntaron, en este caso, si podían usar el material que estaba en la mesa, esta actitud se observó en las primeras 3 ó 4 sesiones. Frente a este tipo de demandas, la coordinadora remitía a los maestros a la lectura de la consigna, indicándoles que con base en ella decidieran.

Instalar como recurso para resolver dudas, cada vez que es pertinente, la relectura de la consigna es un sugerencia para disminuir la mala práctica observada por los alumnos y propiciada por los maestros, de demandar sistemáticamente aclaraciones, cuando las dudas pueden esclarecerse desde la información escrita.

Posteriormente, en esta oportunidad como en otras, se aprovechó sucesos como éste para discutir acerca del contrato didáctico (Brousseau,

---

[6] El conformado por físicos, matemáticos y actuarios.

[7] Ficha 18 de Matemáticas I. Desde las primeras averiguaciones con los maestros, cuando se trataba prioritariamente de una discusión sobre lo didáctico, se perfilaron los problemas disciplinares. Así, el referente central de las situaciones de la Ingeniería se encuentra en Matemáticas I, con las adecuaciones y ajustes propios de un trabajo investigativo de este tipo.

1997) a fin de ir mostrando a los docentes (para el ulterior trabajo con los alumnos), el impacto de éste en el aprendizaje.

Es por esto que la coordinadora del taller incorporó (paulatinamente) en la experiencia del curso, nuevas reglas de juego (contrato didáctico). A medio camino del curso los maestros empezaron a percatarse, entre otros aspectos, que: la 'clase' nunca empezaba con la exposición y/o explicaciones sobre contenido matemático; que cada vez que aparecía una duda ésta no era, en primera instancia, resuelta por la coordinadora, en su lugar la transfería al grupo o la exportaba a la lectura de la ficha; que la solución a las situaciones problemáticas planteadas estaba librada a las posibilidades de ellos 'como alumnos del curso'.

Cabe mencionar que el resguardo de los maestros para utilizar las hojas, reglas y compases disponibles en la mesa, no estaba "en pedir prestado" un material que no les era propio sino que les desconcertó una consigna que no explicitaba la forma *como se esperaba* que resolvieran el trazo de los triángulos. Ciertamente, en ésta no se dice: "con regla y compás..."; pero, ¡tampoco impide que se use ese material!

Nos interesa destacar cómo los maestros, en esta ocasión como en muchas otras, se comportan de manera semejante a sus alumnos quienes les demandan aclaraciones que pueden resolver de otra manera; como podría ser haciendo una relectura de la consigna. Más aún, llama la atención que siendo los maestros: matemáticos, físicos o actuarios era de esperarse que estuvieran habilitados en reconocer las condiciones de "frontera". Quizá no repararon en ello porque no reconocieron la situación como un problema sino como una actividad: "trazar triángulos". Pero, condiciones son condiciones y "lo no prohibido está permitido".

A título de defensa, los maestros en el espacio de reflexión sobre su forma de actuar "como alumnos", si bien aceptaron que no detectaron que la consigna les permitía resolver de la manera como ellos consideraran conveniente (con regla y compás, con uno de estos instrumentos o con ninguno; o bien de cualquier otra manera imaginable), algunos argumentaron -y esto es lo más sugerente, que habían preguntado si podían o no usar el material disponible porque esperaban que la conductora del taller *iniciara la clase* es decir, que al menos *diera indicaciones*, sobre lo que esperaba de ellos, tales como: *tomen una regla, tracen un segmento de x centímetros, tomen el compás, ábranlo un radio de z centímetros, apoyen el compás en uno de los extremos del segmento que trazaron*, etc.

Por el momento, vale la pena destacar que la argumentación de defensa externada por los maestros evoca otra práctica docente dominante y pone de manifiesto lo que estos profesores hubieran hecho con las fichas de haberlas implementado en su salón de clase. Esto explica, de algún modo, sus anticipados comentarios sobre la *trivialidad* de los contenidos de algunas fichas. En este caso, como veremos con más precisión, si la conductora del taller, no hubiera transferido a los maestros la decisión sobre cómo resolver la situación se habría obstaculizado la aparición de los modos diferentes de actuar y pensar de los docentes, que sabemos se sostienen en los conocimientos diferenciados que poseen.

Este hecho (las distintas formas de proceder) es posible que los maestros lo observen en sus alumnos si se decidieran a dejar de dar indicaciones sobre el tipo de solución de los problemas, que esperan de sus alumnos. Las discusiones sobre el particular, suscitaron en los maestros interesantes reflexiones sobre sus prácticas de enseñanza: *entonces, hay que dejar* (que los alumnos) *hagan lo que quieran?... y si no pueden hay que ayudarlos, ¿o, no? ... es que a veces no tienen 'el conocimiento'.*

Esta situación se aprovechó además para recapacitar sobre una de las problemáticas, ya señaladas, que preocupa a los maestros: *sus alumnos no saben leer.* Sin menoscabo de esta realidad, ahora interesa revisar lo que al respecto les sucedió a los maestros.

¿Antes de empezar a 'resolver' (actuar) los maestros se toman un tiempo para reflexionar sobre la totalidad de la situación planteada y las posibles relaciones entre los datos en consonancia a lo que tanto reclaman de sus estudiantes? Recordemos la queja: (los alumnos) *leen párrafo por párrafo sin tomar en cuenta todos los datos del problema.*

Específicamente, en la situación planteada interesaba ver si podían anticipar que no es posible trazar *todos*[8] los triángulos. Lo que implicaría que la propiedad de *desigualdad entre los lados de un triángulo*[9] estaba instalada en su significado (y no sólo memorísticamente) en los saberes de los maestros. O bien, si reparaban en el axioma equivalente: *la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta.* Es decir, si entre las implicaciones de estos axiomas sabían que tres magnitudes no son suficientes para determinar un triángulo (triángulos 3 y 5).

---

[8] Los triángulos 3 y 5 no existen.

[9] La suma de las magnitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la magnitud del tercer lado.

Cabe precisar que tanto el orden de enunciación de los triángulos como el de sus magnitudes (lados: a, b y c), no es casual. Esto fue objeto de discusión posterior con los participantes ya que refiere a una consideración de orden didáctico: anticipar las posibles reacciones de los alumnos a fin de evidenciar los alcances y limitaciones de sus saberes. Y viene a ser una de las consideraciones fundamentales que debe hacer quien diseña una situación didáctica.

5.2 El trazo de los triángulos

La situación enunciada está pensada también para averiguar los conocimientos que los profesores tienen acerca de cuáles son los recursos geométricos para trazar triángulos (atendiendo a condiciones métricas) y cuáles propiedades de éstos, conocen y utilizan.

Una maestra, por ejemplo, trazó usando sólo la regla, el 1: empezó por trazar un segmento de 5 cm; ubicó el punto medio de éste y desde ahí trazó una perpendicular al segmento; moviendo la regla (colocada en un extremo del segmento y la perpendicular) localizó el tercer vértice. La estrategia funciona para este caso (se trata de un isósceles), pero se le manifestó ineficiente para el 2.

La conductora del taller observa (¿realmente desconoce cómo trazar triángulos con regla y compás?) pero no interviene directamente[10], sólo le recuerda al grupo que pueden, si lo consideran necesario, resolver conjuntamente con sus compañeros (prácticamente todos estaban resolviendo individualmente). Entonces, la maestra comenta con la compañera que tiene cerca, ésta le hace referencia al uso del compás (respecto al control de la magnitud y traslado de ésta a partir de uno de los puntos-vértice), lo intenta pero coloca el compás en el mismo extremo del segmento y los semicírculos no se cortan, nuevamente pide ayuda, finalmente logra hacerlo y utiliza este recurso para trazar los triángulos restantes.

Hay que precisar que en este intercambio, las maestras hablan en voz baja, como si quisieran pasar desapercibidas por la conductora y el

[10] El conductor de talleres dirigidos a docentes, debe tener particular cuidado de no poner en evidencia las carencias disciplinaria de éstos frente a sus compañeros, máxime cuando se trata, como en este caso, de maestros profesionales de la matemática que se enfrentan a problemas que implican conocimientos elementales de esta disciplina.

resto de los compañeros. Para los maestros, más que para los alumnos, y máxime para docentes con formación profesional en este área de conocimiento, es muy importante el resguardo de lo que anticipan deberían saber y desconocen o no recuerdan bien. Sin embargo, es necesario aclarar que en este suceso y en otros equivalentes, los maestros del bachillerato a diferencia de lo reportado sobre los de la escuela primaria, rectifican sus desaciertos con mayor rapidez y sostienen con más soltura los intercambios sobre las nociones y herramientas de la matemática en las discusiones plenarias.

Otro aspecto que se observa en el estudio, es que los profesores, al igual que los alumnos, se ponen a resolver 'párrafo por párrafo' sin permitirse tener una visión de conjunto sobre la situación planteada.

En el planteamiento de trazo de triángulos ninguno de los maestros anticipó la no existencia del 3, ni aún en el momento que llegaron a éste. Fue necesario que intentaran trazarlo para darse cuenta que no era posible. Es hasta entonces que aparece, con cierta timidez, *la desigualdad del triángulo*, ésta en principio les sirve para 'asegurar' que el 5 tampoco se puede trazar.

Sin embargo, para desconcierto del grupo, un maestro dice que sí se puede trazar el 3, y 'lo muestra'; sorprendentemente sus compañeros le solicitan que les explique *cómo lo hizo*, en lugar de asegurarle la imposibilidad de su trazo con base en la mencionada *desigualdad del triángulo.*

La explicación que reciben es: *empecé* (el trazo del supuesto triángulo) *por el lado que mide 4 cm...¿Por qué empezaste por ese lado? ...Me pareció que* (si lo iniciaba) *por el* (lado) *de 10* (cm) *no me iba a salir.*

Frente a esta declaración, las dudas y reacciones fueron diversas:

a) Una maestra toma la regla y mide 'el triángulo'...aumenta su desconcierto y lo comparte con los compañeros: *si, si* (el 'triángulo') *está bien hecho.* Ella encontró diferencias de dos milímetros (9.8 cm, 6.2 cm y 4.2 cm) respecto a las solicitadas en la consigna, pero le parecieron despreciables; en cambio, pone en tela de juicio su propia anticipación (sobre la imposibilidad del trazo) parece que no reconoce la relevancia del error de paralaje.
Cabe preguntarse, entonces: ¿en qué se asienta para los profesores la demostración geométrica?, ¿en lo que se percibe de un dibujo?, ¿en las relaciones métricas?

b) Otros docentes, frente a la 'evidencia' del trazo del 3, trataron de explicarse por qué a ellos no les había salido. Incluso dudaron sobre su anticipación respecto al 5 *¿será que si se empieza por 'lado chico del triángulo'*[11] *si se pueda trazar?* ¡Y, lo intentaron!

c) Dos maestras cuestionaron la validez del teorema en discusión: *tal vez* -comenta una de ellas- *lo que aprendí en la facultad es incorrecto*. Para la otra, se trataba de un problema de memoria: *¿la suma de dos lados es* ***mayor o mayor igual*** *que el tercero?,..., es que no me acuerdo, ahí puede estar 'el misterio'*. Como se ve, su alternativa para despejar la duda es de orden memorístico (y se resuelve preguntando, insiste en que alguien le responda) en lugar de buscar resolverla a través del razonamiento.

d) Finalmente un profesor que se incorporó tarde al taller al enterarse de la discusión instalada, dijo: *esto no es posible* (trazar el 3) *y se los demuestro*; no obstante en la discusión grupal su argumentación perfilaba a la exposición de la demostración formal de la *desigualdad del triángulo* y no tuvo a mano un recurso alternativo que pudiera esclarecer las contradicciones de saberes en las que sus compañeros estaban inmersos.

La desigualdad del triángulo no apareció, en el grupo, como un argumento contundente para asegurar la imposibilidad del trazo solicitado de los triángulos 3 y 5. Esto es, sólo se dejó ver como una propiedad geométrica susceptible de ser demostrada (seguramente los maestros del estudio saben hacerlo) pero insuficientemente comprendida en sus usos y significados.

---

[11] Intentar el trazo por el lado de menor longitud (en 'triángulos' que no existen), es un recurso frecuente tanto para quienes tienen un conocimiento inestable de la desigualdad del triángulo como para los que no la conocen. Ésta desigualdad se entreteje, por su equivalencia, con 'la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta'. Por esto se anticipaba que en la consigna, el orden de las magnitudes de los lados no es casual. Quizá los alumnos puedan anticipar la imposibilidad de trazar el 3, considerando que $10 = 6+4$, en cambio para el 5 la relación $5 < 14+7$ les sugiere la posibilidad del trazo

6. A título de conclusión

Entre los hallazgos más importantes se destaca que el proceso de capacitación inscrito en el contexto de una ingeniería didáctica posibilitó que los profesores participantes se vieran inmersos en situaciones que les permitieron encontrar sentido a diversos recursos didácticos derivados de las teorías constructivistas del aprendizaje, en la medida en que las discusiones grupales versaron sobre hechos educativos observables en los que los protagonistas fueron ellos mismos.

Reconocieron que pedir que los alumnos lean artículos matemáticos, si bien en algo pueden servirles, esta es una actividad que no están directamente relacionada con la comprensión de condicionantes y el necesario establecimiento de las relaciones semánticas entre los datos característicos de los problemas matemáticos. Por lo que tienen que seguir explorando recursos de enseñanza para lograr que sus alumnos puedan realizarlo. La experiencia les permitió solamente empezar a reparar en la complejidad didáctica subyacente.

Poder reflexionar sobre los recursos didácticos utilizados por la coordinadora -consecuentes a la TSD- y analizarlos en relación a lo que posibilitaron en su propio conocimiento de la matemática, les permitió empezar a cuestionar, al principio débilmente y con desconcierto, su propia práctica docente y los efectos de ésta en sus alumnos.

La explicación (clase magistral) del recurso convencional para resolver cierto "tipo de problemas" como primera instancia de aprendizaje para los estudiantes empezó a develarse en desventaja respecto a plantear un problema -y sin que medie explicación por parte del maestro sobre las posibles soluciones a éste, dejar que sean los alumnos los que asuman la responsabilidad de resolverlo. Sin embargo, algunos maestros, hacia el final de la experiencia, manifestaron todavía dudas al respecto al resguardo de otras consideraciones: el tiempo disponible... *creo que a veces sí se puede hacer esto, pero si los alumnos no pueden o se tardan mucho habría que darles algunas explicaciones para 'ayudarlos a comprender'.*

No obstante lo sugerente que pudiera haber resultado la experiencia para los docentes no puede desestimarse la dificultad que conlleva la implementación en aula del proceso didáctico sucintamente descrito, por lo que se anticipa la necesidad de tener espacios de actualización periódicos a fin de garantizar la consolidación de los mismos.

Finalmente si bien la ingeniería implica el diseño de situaciones de enseñanza para promover aprendizaje, la asunción de la investigación es establecer variables didácticas relevantes[12] para sustentar procesos de actualización para profesores del nivel preuniversitario.

Uno de los primeros anticipos al respecto, derivados de la experiencia descrita, es la importancia del diseño de situaciones problemáticas que procuren la reflexión del conocimiento matemático inicial (aritmética, geometría elemental y álgebra), pero no desde la formalidad de los mismos sino desde de sus *usos y funciones.* Parece ser que poner en evidencia la ineficacia e ineficiencia del conocimiento matemático cuando el sujeto, en el proceso de aprendizaje, no ha podido acceder a la comprensión de su sentido (como se puede apreciar en la manera de proceder de los docentes estudiados), resulta un punto de partida interesante para cuestionar la sobre valoración que los maestros del bachillerato le confieren al aspecto formal de la matemática y desde esta consideración pudieran empezarse a redefinir los procesos de enseñanza.

7. Bibliografía

Artigue, M (1995). "Ingeniería Didáctica", en *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávalos, A. (1997). *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización.* Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Brousseau, G. (1986). "Fondements et méthodes de la mathématiques", en *Recherches en didactique des mathématiques,* La Pensée Sauvage, Vol. 7 No. 2.

Brousseau, G. (1997). "Coherence and incohorence of the modelling envisaged: The paradoxes of the didactical contract", en *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Fuenlabrada, I. (1988). "Experiencias didácticas con maestros", en *Formación de maestros e innovación didáctica.* DIE Memorias, México.

[12] Se trata de una exploración de *condicionantes* de una propuesta de intervención y no de la constitución de una secuencia paradigmática para la enseñanza.

Fuenlabrada, I., Barriendos, A.L. y Vivanco, B. (2006). *Matemáticas I: Fortalecimiento de los conocimientos básicos para estudiantes de educación media superior indígena,* SEP, México.

Moreno, Ma. L. (1998). *Concepciones de los maestros de primaria en torno a la medición. Experiencias en un taller de actualización.* Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.